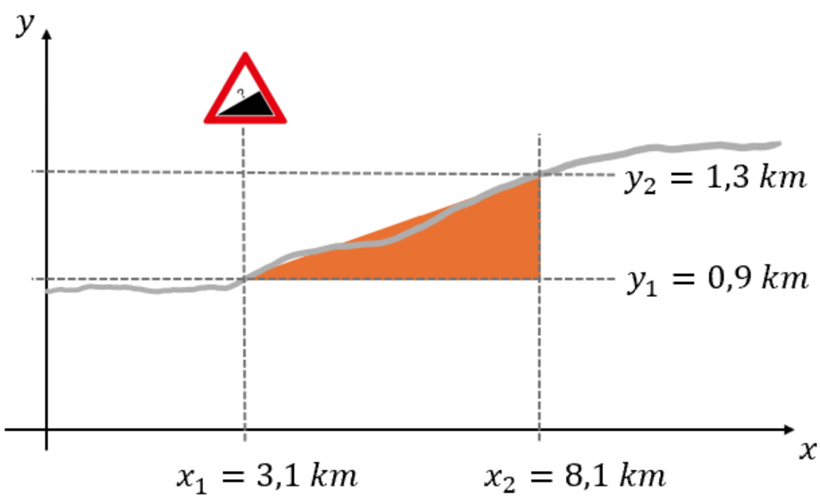
ACHTUNG STEIGUNG!

„Don’t buy upgrades, ride up grades“

Eddy Merckx (fünfmaliger Sieger der Tour de France, 34-facher Etappensieger)

Im Straßenverkehr sieht man häufig Schilder, die vor einer Steigung warnen. Die Steigung auf den Schildern ist in Prozent angegeben z.B. 4%, 6%, 12% etc.
Die angegebene Steigung gibt an wie groß der Unterschied in der Höhe (y-Werte) , relativ zur zurückgelegten Entfernung (x-Werte) des vorausliegenden Streckenabschnitts ist.



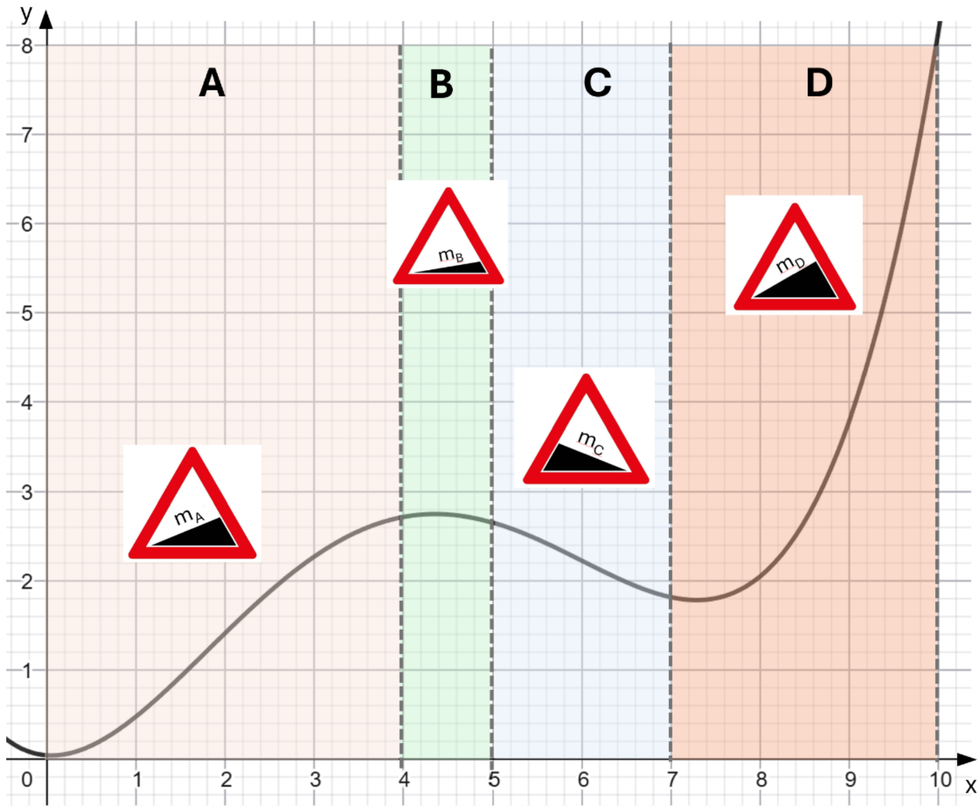
Die mittlere Steigung m zwischen x_1 und x_2 kann mit Hilfe des Differenzquotienten bestimmt werden:

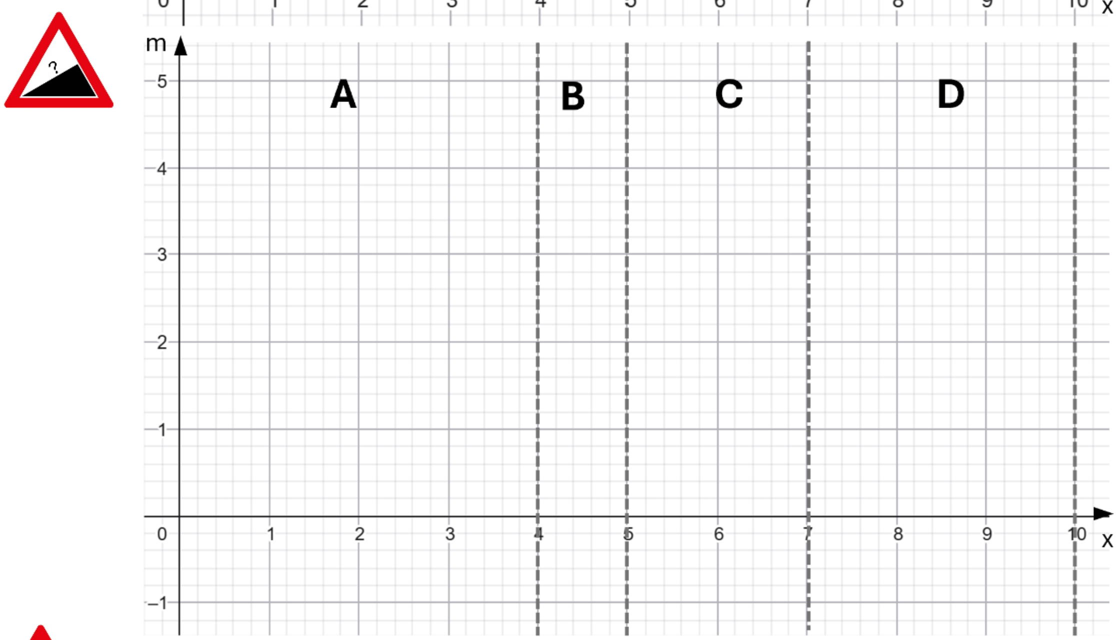
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\qquad - \qquad}{\qquad - \qquad} = \underline{\qquad\qquad} =$$

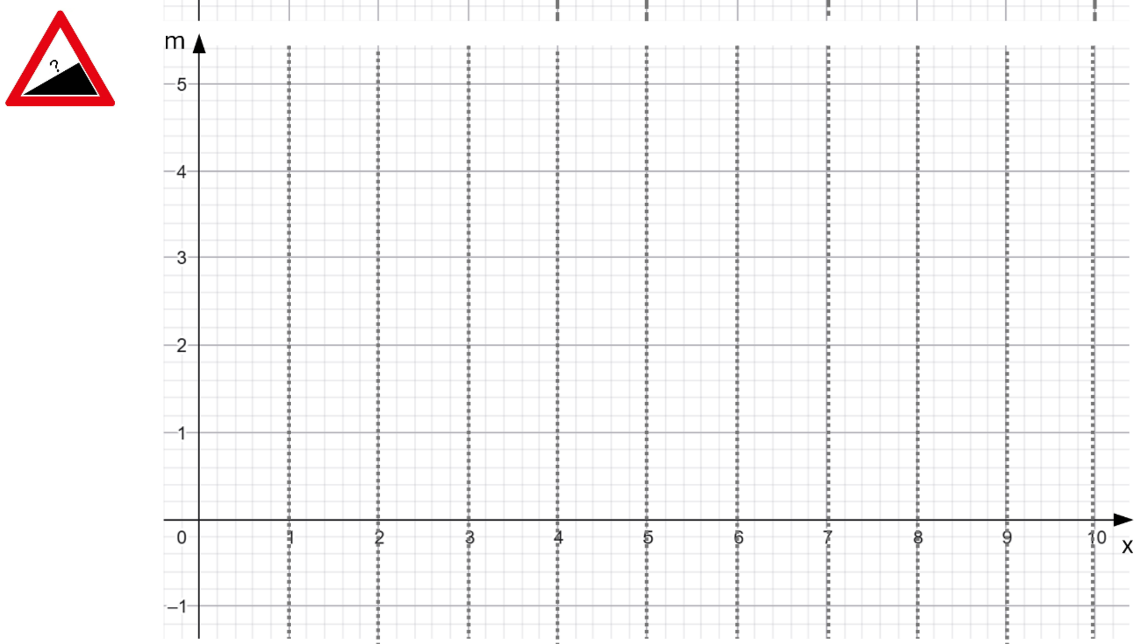
$\longrightarrow$ % Steigung

Das Höhenprofil einer Straße kann durch eine Polynomfunktion f(x) angenähert werden.

a) Bestimme zunächst aus dem Diagramm auf der folgenden Seite die mittlere Steigungen in den 4 Abschnitten A,B,C und D (**als Dezimalzahl, nicht in Prozent**).
b) Trage die mittlere Steigung der verschiedenen Abschnitte in das mittlere Diagramm ein, es sollte sich eine Art Stufenfunktion ergeben.
c) Bestimme die mittlere Steigung des Graphen in den neuen Abschnitte, welche durch die gepunktete Linien eingezeichnet sind und zeichne die Werte der Steigung in das untere Diagramm ein.
d) Erkläre wie man die Abschnitt wählen müsste, damit sich eine durchgängige Linie (ohne Stufen) ergibt und zeichne diese Linie näherungsweise in das untere Diagramm ein.

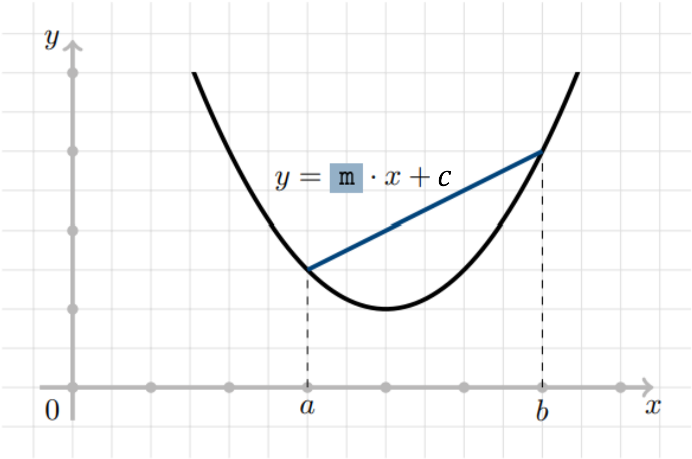

A
B
C
D
m_A
m_B
m_C
m_D
y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


?
m
A
B
C
D
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
−1


?
m
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
−1

Wir unterscheiden zwei Arten der Steigung bzw. Änderungsrate

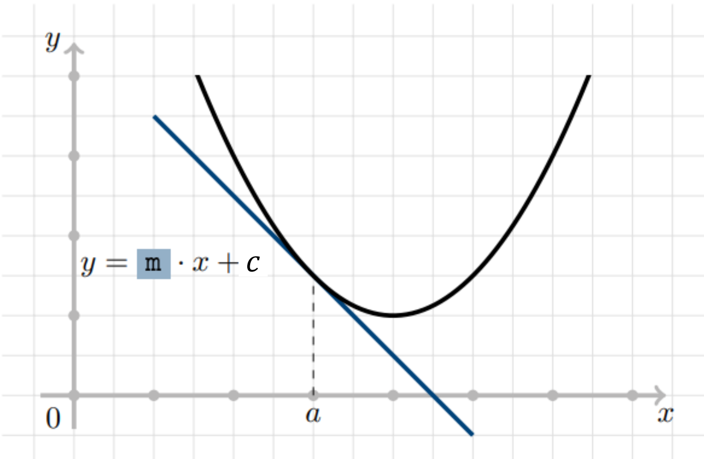
1. Durchschnittliche Steigung:



$$\boxed{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Eine Sekante ist eine Gerade, die eine Kurve (einen Kreis oder Funktionsgraphen) in mindestens zwei Punkten schneidet. Die durchschnittliche Steigung gibt die Steigung der Sekanten im Intervall $[a; b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ an.

2. Momentane Steigung:



$$\boxed{m} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve (einen Kreis oder Funktionsgraphen) in einem bestimmten Punkt berührt. Die momentane Steigung gibt die Steigung der Tangenten an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ an.

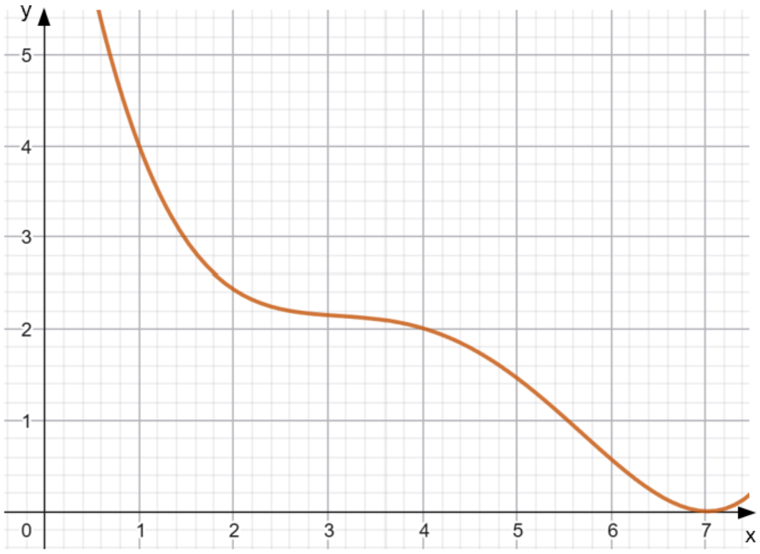
Mit Hilfe der momentanen Steigung ermitteln wir zeichnerisch die Werte der Ableitungsfunktion $f'(x)$. In jedem Punkt entspricht also der Funktionswert von $f'(x)$ der momentanen Steigung der Funktion $f(x)$.

Schrittweises Vorgehen:

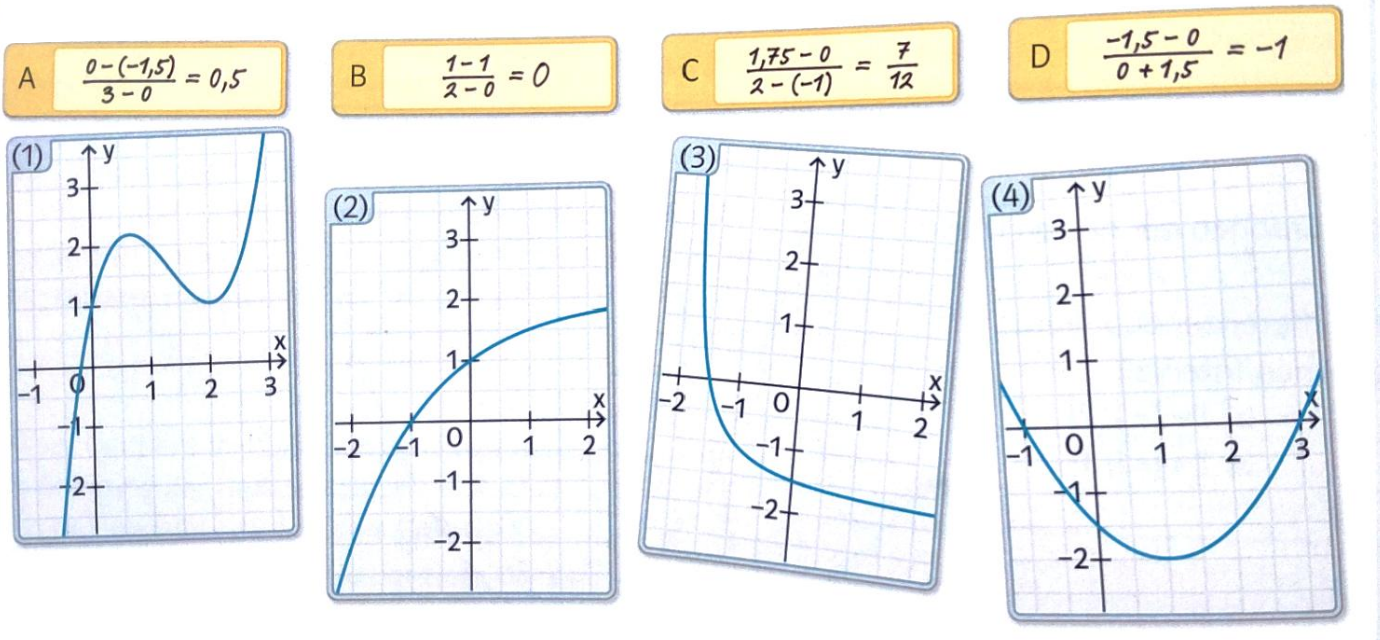
1. Momentane Steigung zeichnerisch ermitteln (zu ausreichend vielen x-Werten)
2. Die ermittelten Werte als Funktionswert auftragen
3. Punkte zu durchgängigem Graphen verbinden

Retardation

A1 Gegeben ist das Schaubild K_f der Funktion $f(x)$.
Ermittle zeichnerisch näherungsweise die momentane Steigung der Funktion bei $x_1 = 1$; $x_1 = 2$; $x_1 = 6$ und die mittlere Steigung im Intervall [2; 6].



A2 Gib an, zu welchem Graphen der Differenzquotient gehört und skizziere die entsprechende Sekante in das Bild.



A3 Skizziere das Schaubild einer Funktion mit der momentanen Steigung 4 bei $x_0 = 2$ und der durchschnittlichen Steigung von 0 im Intervall [−2; 2] in ein geeignetes Koordinatensystem.

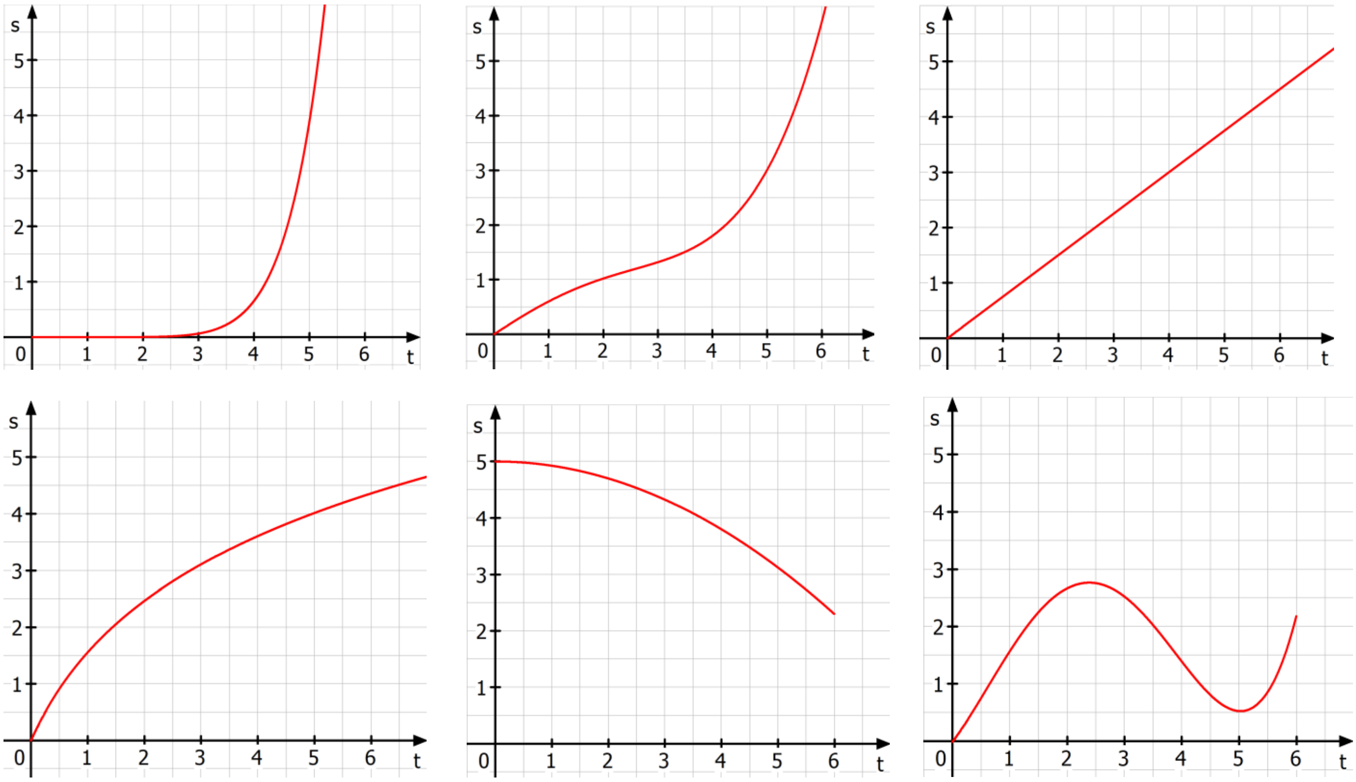
A4 Die Geschwindigkeit v ist die Änderungsrate der zurückgelegten Strecke s, sie entspricht der Steigung in einem t-s-Diagramm.

Bei einem Fahrzeugtest wurden 4 Testfahrten durchgeführt.

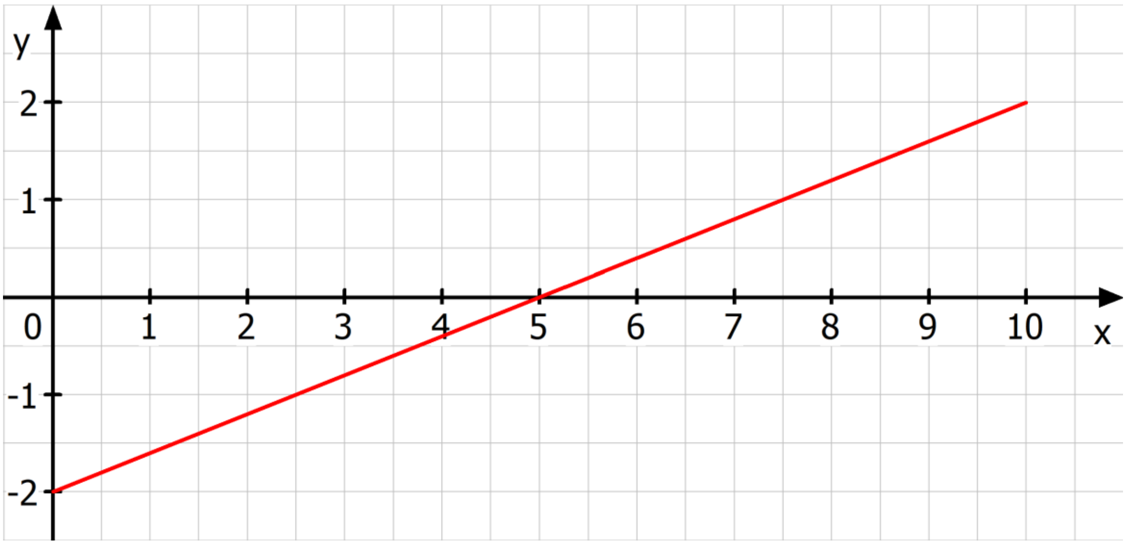
a) Bestimme bei welchen Tests rückwärts gefahren wurde, bei welchen Tests das Fahrzeug immer langsamer wurde, bei welchen Tests die Geschwindigkeit konstant war und welche Tests im Stand gestartet wurden.

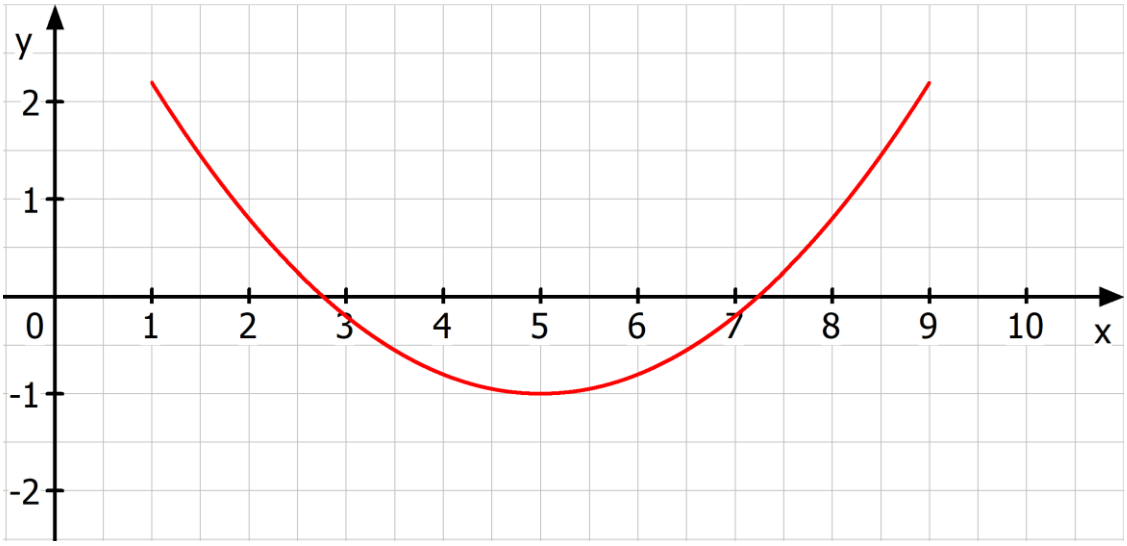
b) Ermittle zeichnerisch bei welchem Test die größte Momentangeschwindigkeit bei t = 5 vorliegt.

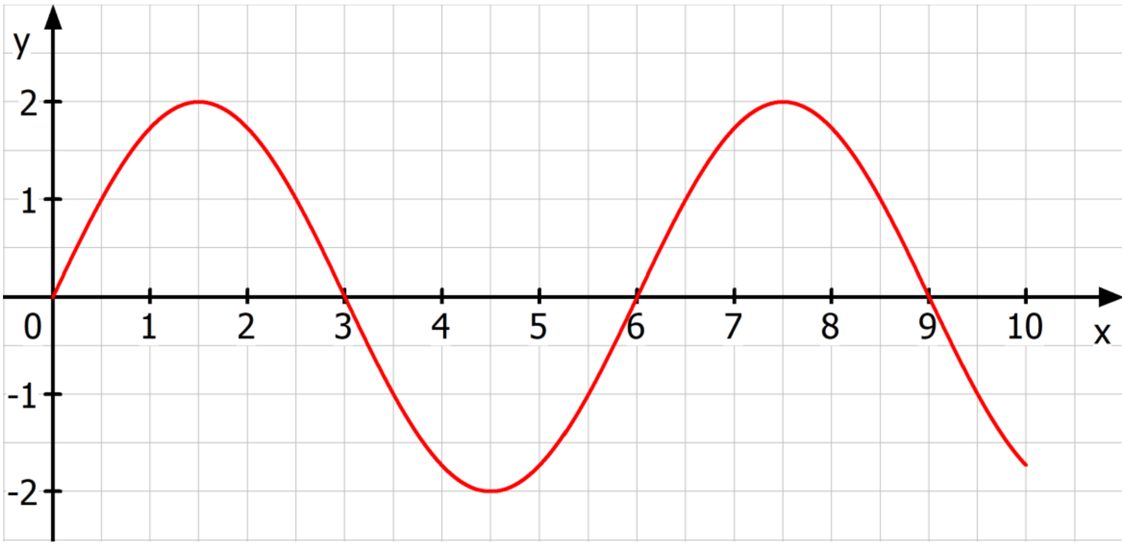
c) Ermittle zeichnerisch bei welchem Test die größte Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall [0; 5] vorliegt.



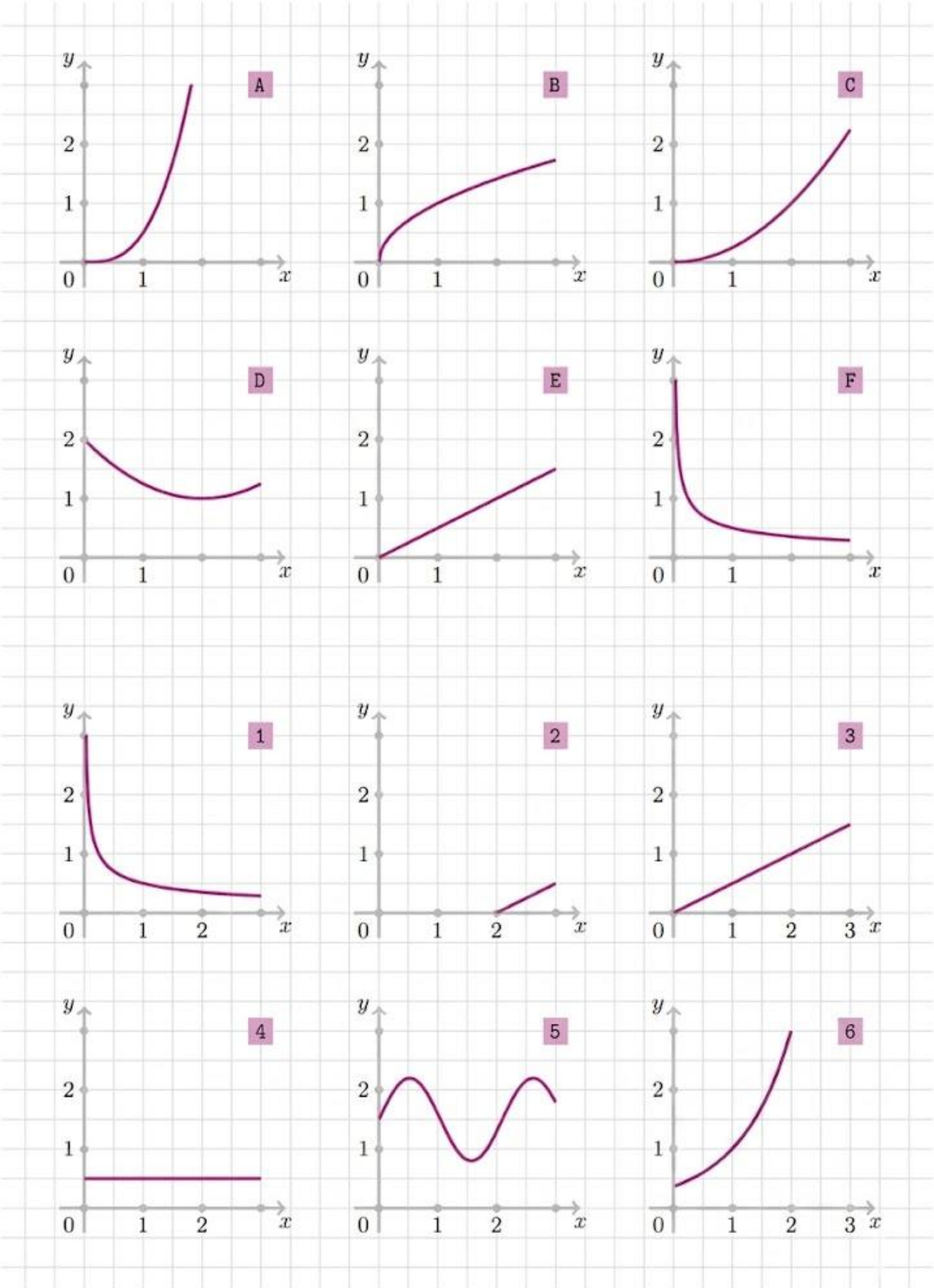
A5 Gegeben ist jeweils das Schaubild einer Funktion f. Skizziere jeweils das Schaubild der Ableitungsfunktion f'.







A6 Gib zu den Graphen der Funktionen A-F jeweils, falls vorhanden, den zugehörigen Graph der Ableitungsfunktion 1-6 an.



A6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}5\,x^2$.

a) Zeige, dass folgendes gilt: Der Differenzquotient im Intervall $[2-h;\ 2+h]$ ist immer gleich, unabhängig von der Wahl von h.

b) Begründe, dass man mit der Eigenschaft aus Teilaufgabe a) auf einfache Weise die Ableitungsfunktion von f an der Stelle $x_0 = 2$ bestimmen kann.

c) Untersuche, ob die Überlegung auch für die Ableitungsfunktion an einer beliebigen Stelle x_0 gilt.