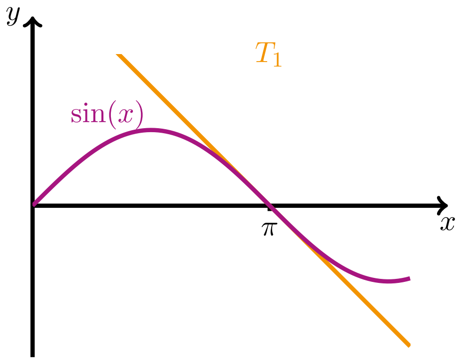
mathematikplus-bpe1.6-taylorpolynomierung

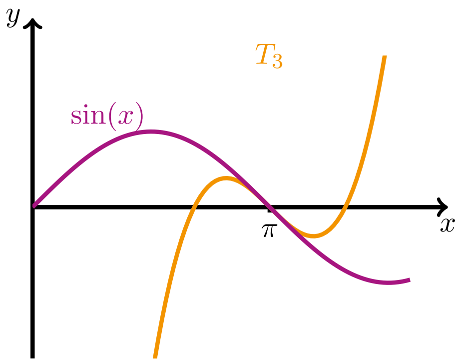
Exposition

Ein Knobler knobelt, wie die Reihe mit Hilfe der Sinusfunktion an der Stelle $x_0 = \pi$ aufgebaut wird. Überlege, wie die Reihe aufgebaut wird.



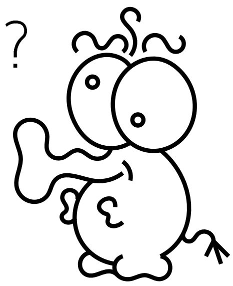
$$T_1(x) = \frac{\sin(\pi)}{1} \cdot (x-\pi)^0 + \frac{\cos(\pi)}{1}(x-\pi)^1 = -x + \pi$$

$$T_2(x) = T_1(x)$$



$$T_3(x) = \frac{\sin(\pi)}{1} \cdot (x-\pi)^0 + \frac{\cos(\pi)}{1}(x-\pi)^1 + \frac{-\sin(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{-\cos(\pi)}{6}(x-\pi)^3 = \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - x + \pi$$

$$T_4(x) = T_3(x)$$



Komplikation

Mit Hilfe des *Talyorpolynomes T* können wir eine n-fach differenzierbare Funktionen in der Umgebung einer Entwicklungsstelle x_0 beliebig annähern:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Mit Hilfe eines Restgliedes $R_n(x)$ können wir somit eine n-fach differenzierbare Funktionen darstellen durch:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt}_{R_n(x)}$$

Peripetie

Beispiel 1

Ermittle das Taylorpolynom vierten Grades der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Vierten Grades bedeutet $n = 4$:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Die ersten vier Ableitungen sind gegeben durch:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}; \qquad f^{(2)}(x) = \frac{-1}{3 \cdot x^{\frac{3}{2}}}; \qquad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8 \cdot x^{\frac{5}{2}}}; \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16 \cdot x^{\frac{7}{2}}}$$

Somit gilt für $x_0 = 1$:

$$f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}; \qquad f^{(2)}(1) = \frac{-1}{3}; \qquad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}; \qquad f^{(4)}(1) = \frac{-15}{16}$$

Eingesetzt in die Taylorformel ergibt sich:

$$T_4(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{1}{8} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{16} \cdot (x-1)^3 - \frac{5}{128} \cdot (x-1)^4$$

1 Fehler

Retardation

Aufgabe 1

Ermittle jeweils das Taylorpolynom dritten Grades an der angegebenen Stelle x_0.

$$a(x) = \cos(x);\ x_0 = \pi; \qquad b(x) = \sin(2 \cdot x);\ x_0 = 1,5 \cdot \pi; \qquad c(x) = e^{x^2+x};\ x_0 = 0$$

AFB I; AFB II

Aufgabe 2

Ermittle eine exakte Taylordarstellung der Funktion $f(x) = e^x \cdot x^2$ inklusive Restglied mit Hilfe eines Taylorpolynoms dritten Grades.

AFB III

Aufgabe 3

Ermittle eien Reihendarstellung von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ mit Hilfe des Taylorpolynomes und $x_0 = 0$.

AFB III

Aufgabe 4

Beweise die Komplikation mit Hilfe von vollständiger Induktion.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) \cdot dt}_{R_n(x)}$$

AFB IV

Katastrophe

Lösung 4

Induktionsanfang für $n = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^0}{0!} \cdot f^{(0+1)}(t) \cdot dt \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{(1)}(t) \cdot dt \\ &= f(x_0) + f(x) - f(x_0) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Induktionsschritt von n auf $n + 1$:

Trivial.