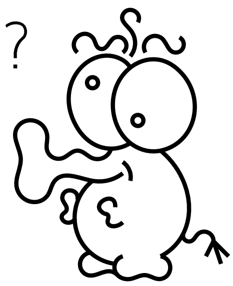
mathematikplus-bpe1.5-differentialgleichung

Exposition

Ein Knobler knobelt, welche Differentialgleichung zu welcher Lösung gehört. Überlege, welche Differentialgleichung zu welcher Lösung gehört und ob die Lösung eindeutig ist.

$y' = y$	$x^2 + 73$
$y' = 2 \cdot x \cdot y$	$42 \cdot e^{x^2}$
$y = y' + y'' \cdot (-1) - \cos(x)$	$\sin(x)$
$y' = (2 \cdot y - 73) \cdot x^{-1}$	$37 \cdot e^x$



4212122024143568701

Komplikation

Wir bezeichnen eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchten Funktion auftreten, als *Differentialgleichung*:

$$y^{(n)} = y^{(n-1)} \dots y^{(n-2)} \dots y$$

Man bezeichnet die höchste Ableitung n einer Differentialgleichung als *Ordnung*. Wir benutzen eine effiziente Notationen zum Lösen von Differentialgleichungen:

$$y := f(x); \qquad y' := \frac{df(x)}{dx}; \qquad y^{(n)} := \frac{d^n f(x)}{dx^n} \text{ mit } n \in \mathrm{N}$$

Wir nutzen folgende Methoden zum Lösen von Differentialgleichungen:

- *Separation der Veränderlichen*: Wir separieren die Funktion von der Funktionsvariablen und integrieren beidseitig:

$$\begin{aligned} y' &= a(y) \cdot b(x) \\ \frac{dy}{dx} &= a(y) \cdot b(x) \qquad | \qquad : a(y) \\ \frac{1}{a(y)} \cdot \frac{dy}{dy} &= b(x) \qquad | \qquad \int \qquad dx \\ \int \frac{1}{a(y)}\, dy &= \int b(x)\, dx \end{aligned}$$

- *Variation der Konstanten*: Um eine Seperation zu ermöglichen, homogenisieren wir die Differentialgleichung. Zur Rehomogenisierung variieren wir die Konstante $c \in \mathrm{R}$:

$$\begin{aligned} & y' = a(y) \cdot b(x) + d(x) \qquad | \qquad \text{Homogenisierung} \\ & y' = a(y) \cdot b(x) \\ & \dots \\ & y = f(x) + c \qquad | \qquad \text{Variation} \\ & y = f(x) + c(x) \end{aligned}$$

Eine Alternative zur Variation der Konstanten ist geeignete Substitution.

Peripetie

Beispiel 1

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung.

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Durch Separation erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int 0,5y^{-1}\ dy &= \int \frac{1}{x}\ dx \\
0,5\ln(y) + c_1 &= \ln(x) + c_2 \\
\ln(y) &= \ln(x^2) + c_3 \\
y &= e^{\ln(x^2)+c_3} \\
y &= x^2 + c_4
\end{aligned}$$

1 Fehler

Retardation

Aufgabe 1

Gib jeweils eine mögliche nichttriviale Lösung der Differentialgleichung an.

1. $y' + y'' = 6 + 6x$
2. $y^{(n)} = y \cdot 2^n$
3. $6^{-1}y''' = y \cdot x^{-3}$
4. $4y = y'' + y''''$

AFB II

Aufgabe 2

Die Flughöhe $y(t)$ eines Massepunktes kann im freien Fall (bei Vernachläassigung des Luftwiderstandes) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt werden (mit Hilfe der Gewichtskraft g) durch die Differentialgleichung:

$$y'' = -g$$

Bestimme die Lösung der Differentialgleichung.

AFB I

Wir können die Differentialgleichungen mit Hilfe von Substitution anstelle von Variation lösen. Beispielsweise:

$$y' = 3x + 4y - 5$$

Durch Substitution mit $u = 3x + 4y - 5$ und $u' = 3 + 4y'$ sowie $y' = 0,25(u' - 3)$ erhält man:

$$0,25(u' - 3) = u \qquad \rightsquigarrow \frac{du}{dx} = 4u + 3$$

Durch Separation der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4u+3} \cdot du &= \int dx \\ 0,25 \ln(4u+3) &= x + c_1 \\ \ln(4u+3) &= 4x + c_2 \\ 4u + 3 &= e^{4x} \cdot c_3 \\ u &= e^{4x} \cdot c_3 - 0,75 \end{aligned}$$

Rücksubstitution mit $u = 3x + 4y - 5$ liefert die Lösung:

$$y = e^{4x} \cdot c_4 - \frac{3}{4}x + \frac{17}{16}$$

1. Löse die obige Differentialgleichung mit Hilfe von Variation.
2. Bestimme jeweils die Lösung mit Hilfe von Variation und mit Hilfe von Substitution:

   $$y' = 1 + y \cdot x^{-1}$$

   (Substratempfehlung: $u = y \cdot x^{-1}$)

   $$y' + 1 = (x + y)^{-1}$$

   (Empfehlung: $u = x + y$)

AFB III

Aufgabe 4

Bestimme jeweils die Lösungen der Differentialgleichung.

1. $y' = y$
2. $y' = \frac{-x}{y}$
3. $y' = 2xy + y$
4. $y' = \frac{2x}{e^y}$
5. $y' = \frac{2xy}{x^2+1}$

AFB II; AFB III

Die Bernoulli-Differentialgleichungen sind benannt nach dem Schweizer Mathematiker Jacob Bernoulli (siehe Foto) mit dessen Hilfe er unter anderem die spezifische Enthalpie für reale Gase bei isentroper Strömung untersuchte. Allgemein lautet die Bernoulli-Differentialgleichungen:

$$y' + a\left(x\right) \cdot y + b\left(x\right) \cdot y^{\alpha} = 0$$

Diese lassen sich lösen durch Substitution mit:

$$u = y^{1-\alpha}$$

Bestimme die Lösungen der Bernoulli-Differentialgleichung:

$$y' = y + xy^3$$

AFB IV

Lösung 5

1. Separation der Veränderlichen mit $y \neq 0$ liefert direkt:
$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int 1\ dx$$
$$\ln(y) = x + c_1$$
$$y = e^x \cdot c_2$$

2. Separation der Veränderlichen mit $y \neq 0$ liefert direkt:
$$\int y\ dy = \int -x\ dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c_1$$
$$y = \pm\sqrt{-x^2 + c_1}$$

3. Ausklammern von y und Separation der Veränderlichen liefert:
$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int (2x+1)\ dx$$
$$\ln(y) = x^2 + x + c_1$$
$$y = e^{x^2+x} \cdot c_2$$

4. Separation der Veränderlichen liefert:
$$\int e^y\ dy = \int 2x\ dx$$
$$e^y = x^2 + c_1$$
$$y = \ln(x^2 + c_1)$$

5. Separation der Veränderlichen liefert:
$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int \frac{2x}{x^2+1}\ dx$$
Substitution mit $u(x) = x^2;\ u'(x) = 2x$ liefert:
$$\ln(y) = \ln(x^2+1) + c_1$$
$$y = (x^2+1) \cdot c_2$$

Es ist $\alpha = 3$ also kann substituiert werden mit $u = y^{-2}$ also gilt:

$$\begin{aligned} u' &= -2 \cdot y^{-3} \cdot y' \\ &= -2 \cdot y^{-3} \cdot (y + x \cdot y^3) \\ &= -2 \cdot y^{-2} - 2x \\ &= -2u - 2x \end{aligned}$$

Hier kann die Veränderliche nicht direkt separiert werden, es muss zuerst *homogenisiert werden*. Dann gilt für die homogenisierte Lösung:

$$u' = e^{-2x} \cdot c_1$$

Also gilt für u:

$$u = e^{-2x} \cdot c_1 + 0,5x - 0,25$$

Da $y = u^{-0,5}$ gilt:

$$y = \left(e^{-2x} \cdot c_1 + 0,5x - 0,25\right)^{-0,5}$$