



mathematikplus-bpe1.4-substituierung

Exposition

Ein Knobler **knobelt an der Formel zu Differentiation von Funktionen** . Überlege, inwieweit die (augenscheinlich verkomplizierte) Formel dabei helfen kann, **ein Produkt von Funktionstermen zu integrieren** .

Für $a; \varphi; F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar gilt:

$$(a(\varphi(u)))' = a'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$$

Man ersetzt a mit F und a' mit f :

$$(F(\varphi(u)))' = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$$

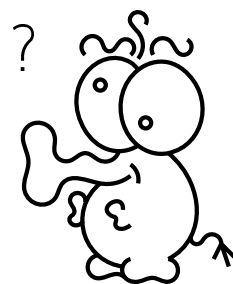
$$f(\varphi(u)) = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$$

Beidseitiges Integrieren liefert:

$$\int f(\varphi(u)) \, du = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du$$

Mit $\varphi(u) = x$ gilt:

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du$$



$$\int \sin(e^x) \cdot e^x \, dx$$

Komplikation

Für $f; \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar gilt und $\varphi(u) = x$ gilt:

$$\int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du = \int f(x) \, dx$$

Peripetie

Beispiel 1

Bestimme das Integral.

$$\int \cos(x^2) \cdot x \, dx$$

Mit $x = \varphi(u) = \sqrt{u}$ und $\varphi'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ gilt:

$$\int \cos(x^2) \cdot x \, dx = \int \cos(u) \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du = \frac{1}{2} \cos(u) = \frac{1}{2} \cos(x^2)$$

1 Fehler

Beispiel 2

Bestimme das Integral.

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Mit $x = \varphi(u) = \sin(u)$ und $\varphi'(u) = \cos(u)$ gilt:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2(u)} \cdot \cos(u) \, du$$

Da $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$ folgt:

$$= \int \cos(u) \cdot \cos(u) \, du$$

Mit Hilfe partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(u + \sin(u) \cdot \cos(u)) \\ &= \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x \cdot \cos(\arcsin(x))) \end{aligned}$$

0 Fehler

Aufgabe 1

Zeige allgemein, dass für $f; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und für $g(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int f(g(x)) \, dx = F(g(x)) \cdot \frac{1}{a}$$

AFB III

Aufgabe 2

Bestimme jeweils das Integral.

1.

$$\int e^{2x} \, dx$$

2.

$$\int e^{x^2} \cdot x \, dx$$

3.

$$\int \ln(x^2) \cdot 2x \, dx$$

4.

$$\int \sin(x^2) \cdot x \, dx$$

5.

$$\int (5x + 2)^4 \, dx$$

6.

$$\int \cos(e^x) \cdot e^x \, dx$$

7.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \, dx$$

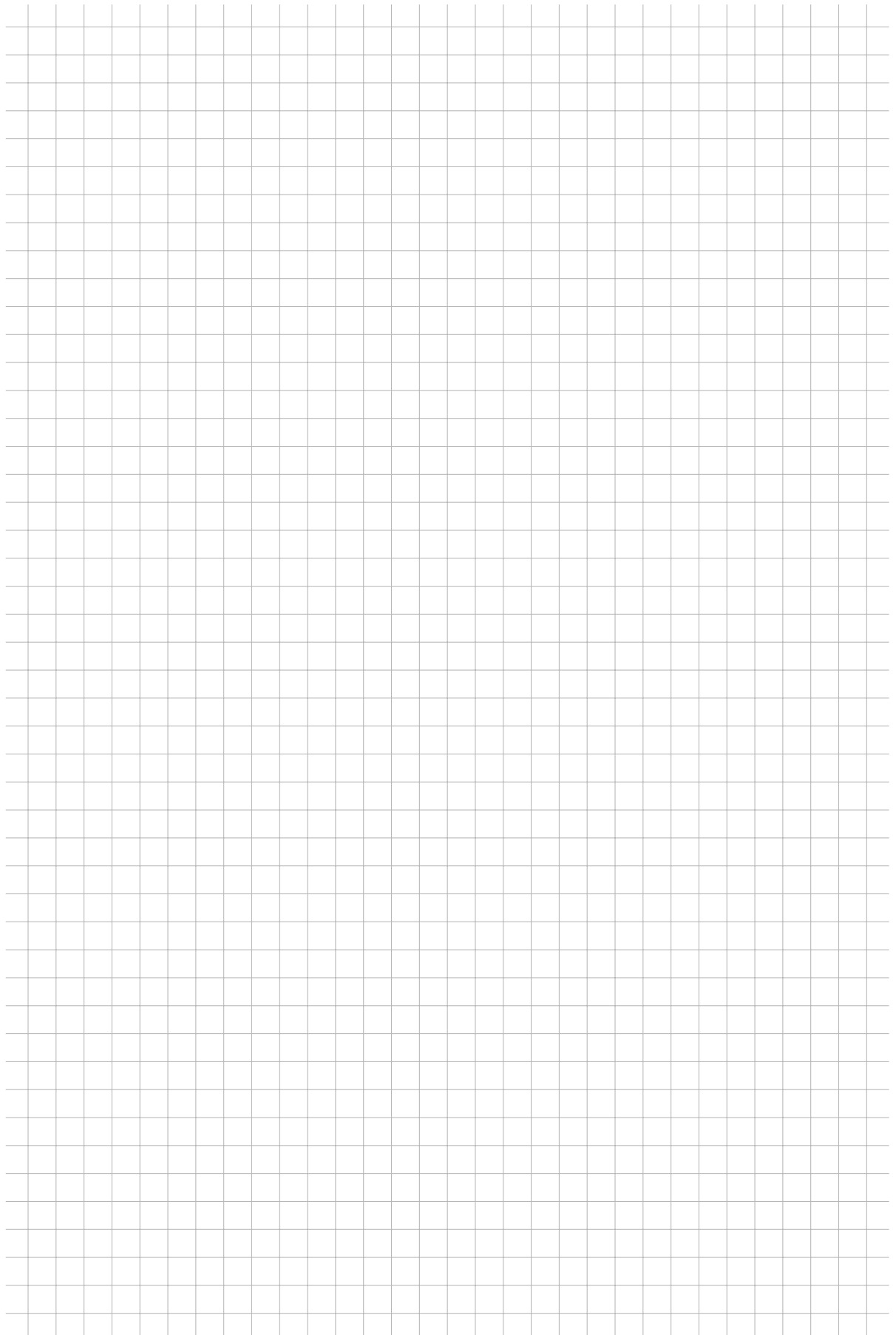
8.

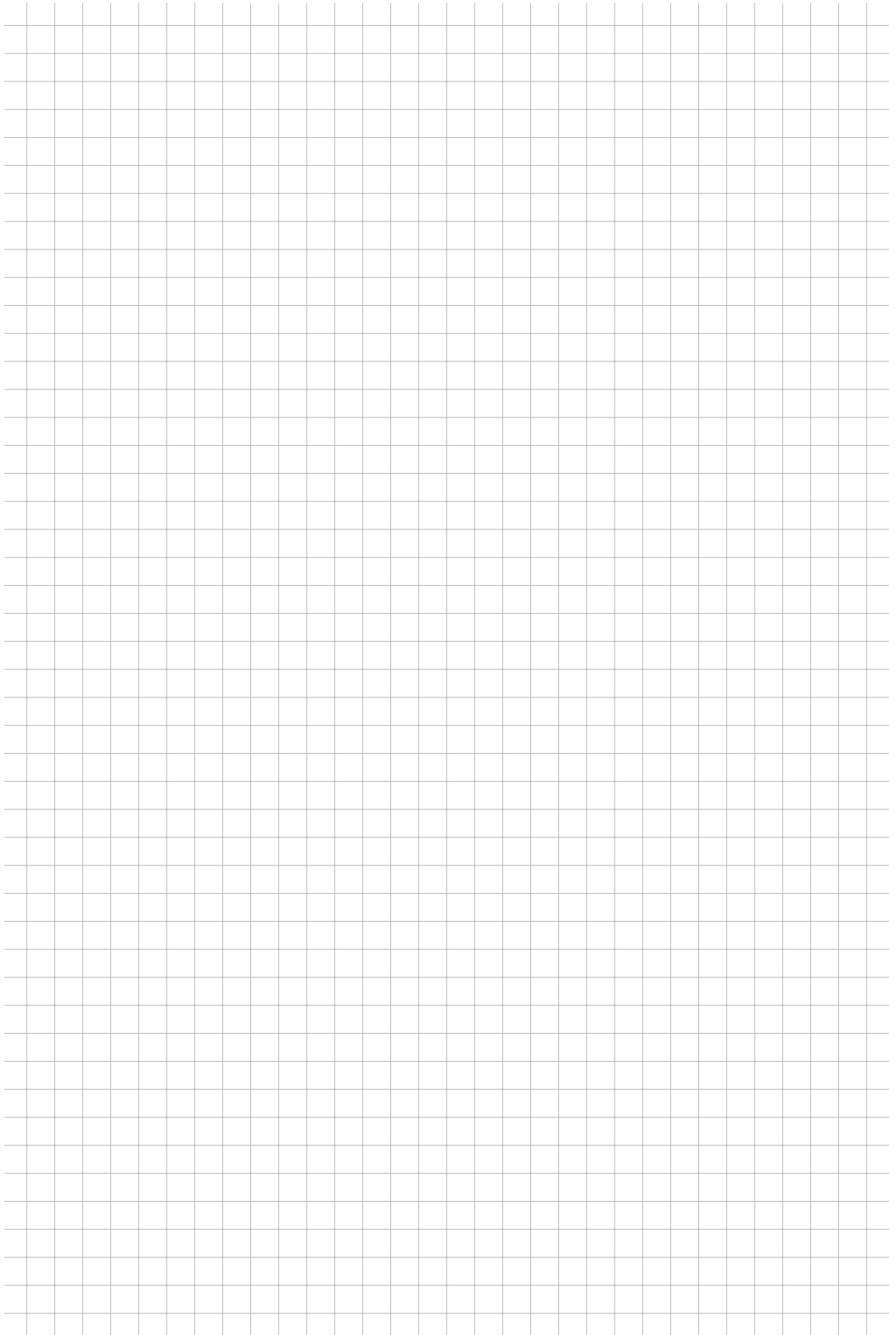
$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \, dx$$

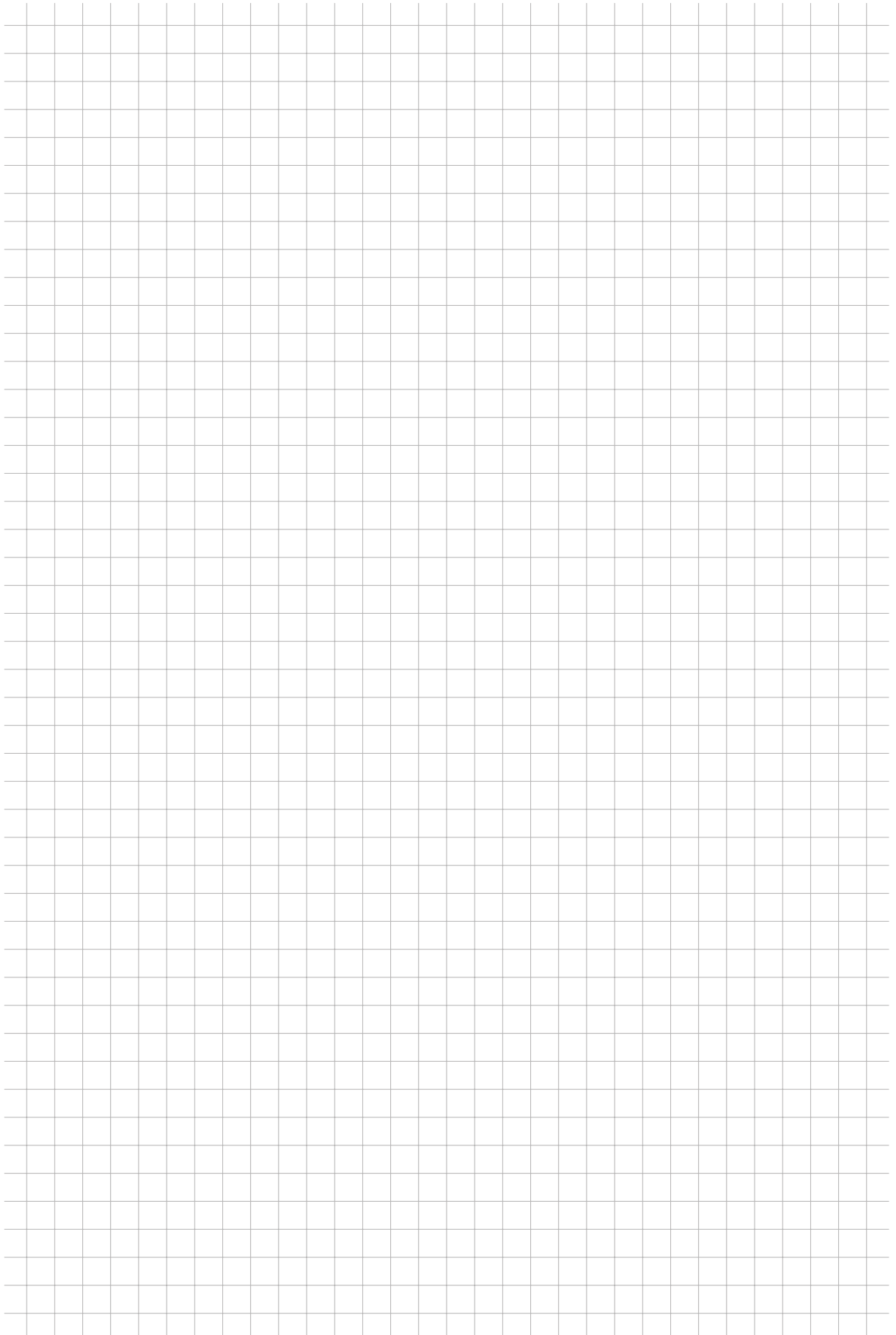
9.

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx$$

AFB II; AFB III; AFB IV







Mit $x = \varphi(u) = \frac{u-b}{a}$ und $\varphi'(u) = \frac{1}{a}$ folgt:

$$\int f(g(x)) \, dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{a} \, du = F(u) \cdot \frac{1}{a} = F(g(x)) \cdot \frac{1}{a}$$

Für die Juristen unter uns ist jeweils $+C$; $C \in \mathbb{R}$ anzufügen.

1. Mit $x = \varphi(u) = 0,5u$ und $\varphi'(u) = 0,5$ gilt:

$$\int e^{2x} \, dx = \int e^u \cdot 0,5 \, du = 0,5e^u = 0,5e^{2x}$$

- 2.

$$\int e^{x^2} \cdot x \, dx = \int e^u \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

- 3.

$$\int \ln(x^2) \cdot 2x \, dx = \int \ln(u) \cdot 2\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du = u \cdot \ln(u) - u = x^2(\ln(x^2) - 1)$$

- 4.

$$\int \sin(x^2) \cdot x \, dx = \int \sin(u) \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du = -\frac{1}{2}\cos(u) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$$

- 5.

$$\int (5x+2)^4 \, dx = \frac{1}{5}(5x+2)^5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}(5x+2)^5$$

- 6.

$$\int \cos(e^x) \cdot e^x \, dx = \int \cos(u) \cdot e^{\ln(u)} \cdot \frac{1}{u} \, du = \sin(u) = \sin(e^x)$$

- 7.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \, dx = \int \frac{\sqrt{u-1}-1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u-1}} \, du = \sqrt{u} = \sqrt{x^2+2x+2}$$

- 8.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \, dx = \int \frac{e^u}{2u} \cdot 2u \, du = e^u = e^{\sqrt{x}}$$

- 9.

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = \int e^u \cdot 2u \, du = e^u \cdot 2u - \int 2e^u \, du = e^u \cdot 2u - 2e^u = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$$