mathematikplus-bpe1.3-partialintegrierung

Exposition

Ein Knobler knobelt an der Formel zu Differentation von Funktionen . Überlege, inwieweit die (augenscheinlich verkomplizierte) Formel dabei helfen kann, ein Produkt von Funktionstermen zu integrieren .

Für $f;\ g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ differenzierbar gilt:

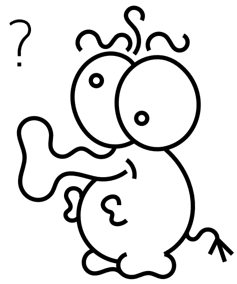
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beidseitiges integrieren nach x liefert:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\ dx + \int f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

Also gilt:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx$$



$$\int \sin(x) \cdot x\ dx$$

Komplikation

Für $f;\ g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ beliebig oft differenzierbar gilt:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

Peripetie

Beispiel 1

Bestimme das Integral.

$$\int x \cdot e^x\ dx$$

$$\int \underbrace{x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}\ dx = \underbrace{0,5 \cdot x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{0,5 \cdot x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\ dx$$
$$= \text{Hilfe ich brauche einen Schnaps!}$$

1 Fehler

Beispiel 2

Bestimme das Integral.

$$\int x^2 \cdot \sin(x)\ dx$$

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x^2}_{g(x)}\ dx = \underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)} \cdot \underbrace{x^2}_{g(x)} - \int \underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}\ dx$$

Jetzt wird der Subtrahend partiell integriert:

$$\int \underbrace{(-\cos(x))}_{f'(x)} \cdot \underbrace{2x}_{g(x)}\ dx = \underbrace{(-\sin(x))}_{f(x)} \cdot \underbrace{2x}_{g(x)} - \int \underbrace{((-\sin(x))}_{f(x)} \cdot \underbrace{2}_{g'(x)}\ dx$$
$$= (-\sin(x)) \cdot 2x - \cos(x) \cdot 2$$

Somit ergibt sich insgesamt:

$$\int \sin(x) \cdot x^2\ dx = (-\cos(x)) \cdot x^2 - ((-\sin(x)) \cdot 2x - \cos(x) \cdot 2)$$
$$= (-\cos(x)) \cdot x^2 + \sin(x) \cdot 2x + \cos(x) \cdot 2$$

0 Fehler

Retardation

Aufgabe 1

Bestimme jeweils das Integral.

1. $$\int x \cdot x \cdot x \; dx$$
2. $$\int e^x \cdot e^{2 \cdot x} \; dx$$
3. $$\int x^2 \cdot e^x \; dx$$
4. $$\int \cos(x) \cdot x \; dx$$
5. $$\int (2x+1) \cdot e^{2x} \; dx$$
6. $$\int \frac{\ln(x)}{x^3} \; dx$$
7. $$\int x \cdot \ln(x) \; dx$$
8. $$\int \sin(x) \cdot \sin(x) \; dx$$
9. $$\int \ln(x) \; dx$$
10. $$\int (\ln(x))^3 \; dx$$
11. $$\int \sqrt{x} \cdot \ln(x) \; dx$$
12. $$\int \frac{x+1}{e^x} \; dx$$

AFB II; AFB III; AFB IV

Katastrophe

Lösung 1

Für die Juristen unter uns ist jeweils $+C;\ C \in \mathrm{R}$ anzufügen.

1. Arg Trivial
2. Arg Trivial
3. Zweimaliges partielles integrieren führt zu:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot e^x\ dx &= x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\ dx \\ &= x^2 \cdot e^x - (e^x \cdot 2x - \int 2e^x\ dx) \\ &= x^2 \cdot e^x - e^x \cdot 2x + 2e^x) \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2)\end{aligned}$$

4. Trivial:

$$\begin{aligned}\int \cos(x) \cdot x\ dx &= \sin(x) \cdot x - \int (-\sin(x))\ dx \\ &= x \cdot \sin(x) + \cos(x)\end{aligned}$$

5. Trivial:

$$\begin{aligned}\int (2x+1) \cdot e^{2x}\ dx &= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot (2x+1) - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2\ dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot (2x+1) - \frac{1}{2}e^{2x} \\ &= x \cdot e^{2x}\end{aligned}$$

6. Trivial:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x^3}\ dx &= -\frac{1}{2}x^{-2} \cdot \ln(x) - \int \left(-\frac{1}{2}x^{-2} \cdot \frac{1}{x}\right)\ dx \\ &= -\frac{1}{2}x^{-2} \cdot \ln(x) - \int \left(-\frac{1}{2}x^{-3}\right)\ dx \\ &= -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} \\ &= \frac{2\ln(x)+1}{4x^2}\end{aligned}$$

7. Trivial:

$$\begin{aligned}\int x \cdot \ln(x)\ dx &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\ dx \\ &= \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln(x) - 1)\end{aligned}$$

8. Mit $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x) \cdot \sin(x)\ dx &= -\cos(x) \cdot \sin(x) - \int (-\cos(x) \cdot \cos(x))\ dx \\
&= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int (1 - (\sin(x))^2)\ dx \\
&= -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int (\sin(x))^2)\ dx
\end{aligned}$$

Beidseitiges addieren von $\int (\sin(x))^2)\ dx$ führt zu:

$$2 \int \sin(x) \cdot \sin(x)\ dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) + x$$

Somit gilt:

$$\int \sin(x) \cdot \sin(x)\ dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cdot \cos(x))$$

9. Hinzufügen einer unkreativen 1 führt zu:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x) \cdot 1\ dx &= \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\ dx \\
&= x \cdot \ln(x) - x
\end{aligned}$$

10. Hinzufügen einer unkreativen 1, zweimaliges partielles integrieren und verwenden von 10 führt zu:

$$\begin{aligned}
\int 1(\ln(x))^3\ dx &= x \cdot \ln(x)^3 - \int x \cdot 3\ln(x)^2 \cdot \frac{1}{x}\ dx \\
&= x \cdot \ln(x)^3 - (3x \cdot \ln(x)^2 - \int 2x \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\ dx) \\
&= x \cdot \ln(x)^3 - 3x \cdot \ln(x)^2 + 6 \int \ln(x)\ dx \\
&= x \cdot \ln(x)^3 - 3x \cdot \ln(x)^2 + 6x \cdot \ln(x) - 6x
\end{aligned}$$

11. Trivial:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} \cdot \ln(x)\ dx &= \frac{2}{3}x^{1,5} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3}x^{1,5}\ dx \\
&= \frac{2}{3}x^{1,5} \cdot \ln(x) - \frac{4}{9}x^{1,5}
\end{aligned}$$

12. Trivial:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{e^x}\ dx &= -e^{-x} \cdot (x+1) - \int (-e^{-x})\ dx \\
&= -e^{-x}(x+2)
\end{aligned}$$

4224102024115568706