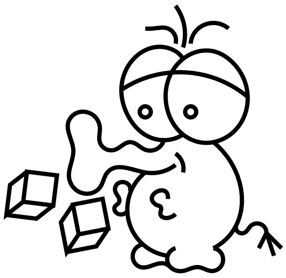
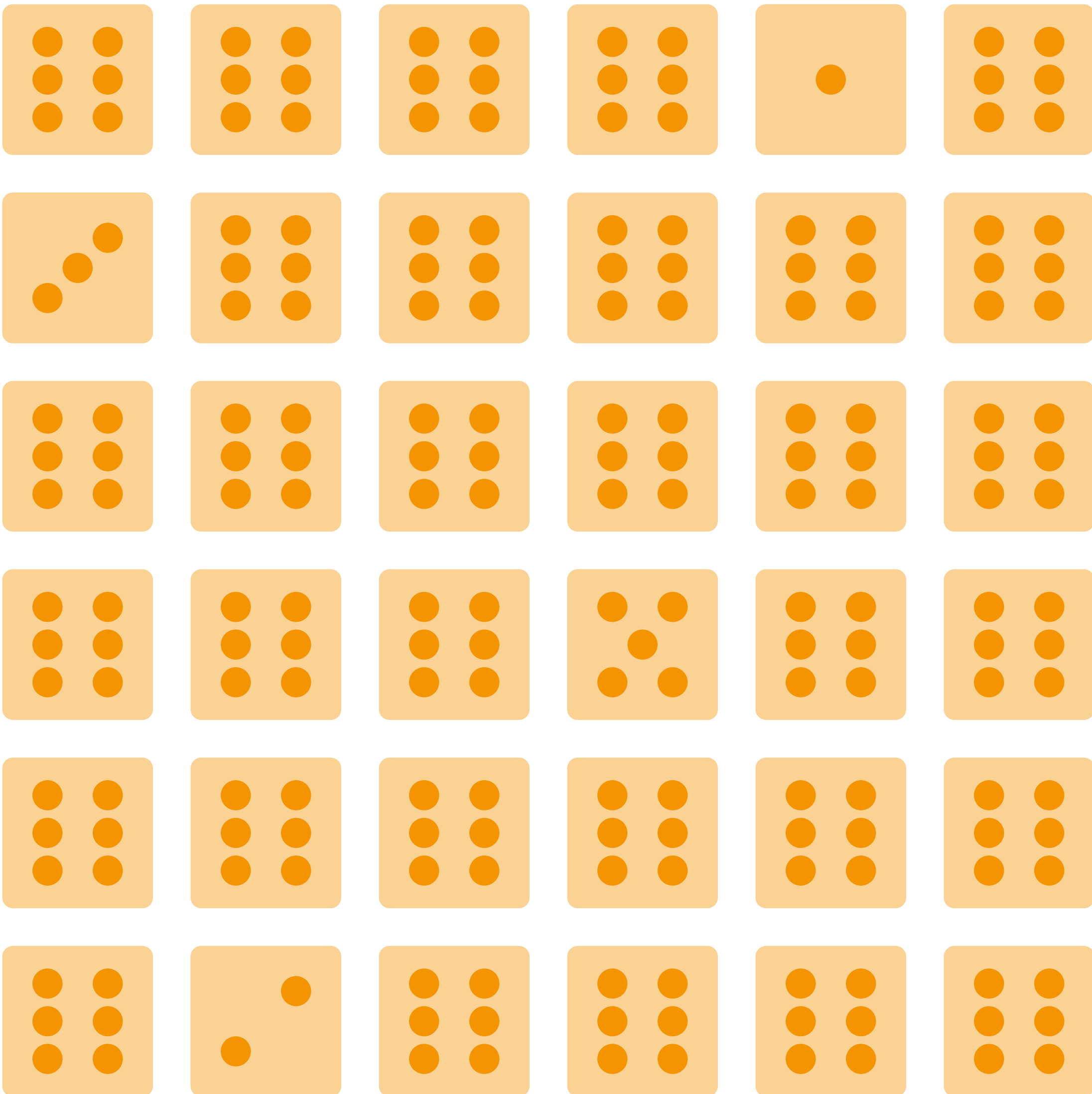
mathematikganj2-bpe17.1bpe17.2-grundlegung

Exposition

Ein Würfler würfelt einen handelsüblichen Würfel und erhält die untenstehenden Ergebnisse . Überlege, wie es dazu kommen kann und ob es sich bei seiner Würfelung um ein Zufallsexperiment handelt.



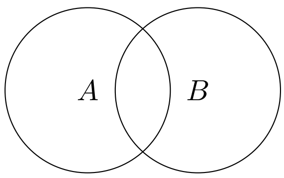


Komplikation

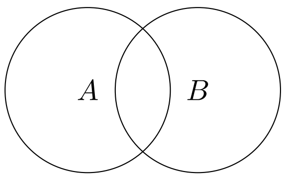
Wir definieren ein Experiment dann und nur dann als *Zufallsexperiment* wenn gilt:

Ein Zufallsexperiment, was mehrmals hintereinander ausgeführt wird, bezeichnen wir als *mehrstufiges Zufallsexperiment*. Ein Zufallsexperiment, bei dem alle betrachteten Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben bezeichnen wir als *LaPlace-Experiment*.
Mit Hilfe von *relativen Häufigkeiten* können wir Werte für Wahrscheinlichkeiten abschätzen. Eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* ordnet Werten einer Zufallsvariable ihre Wahrscheinlichkeiten zu.
Weiter definieren wir die Begriffe:

- *Ergebnismenge* S:
- *Ergebnis*:
- *Ereignis* A:
  - *Sicheres Ereignis* S:
  - *Unmögliches Ereignis*:
  - *Gegenereignis* $\overline{A}$:
  - *Verknüpfte Ereignisse:*
    * $A \cap B$:



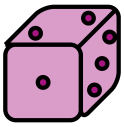
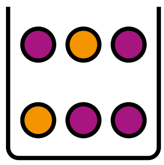
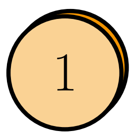
    * $A \cup B$:



Peripetie

Beispiel 1

Gib an, welche Elemente zusammengehören.

 Zufälliges Werfen eines Würfels	{Lila}	{Kopf; Zahl; Kante}
Zahl	$\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$	{Kopf; Kante}
{Gerade Zahl}	5	 Zufälliges Ziehen aus einer Urne
{Lila; Orange}	Orange	 Zufälliges Werfen einer Münze

- Würfel: Ergebnismenge $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$; Ereignis {Gerade Zahl} Ergebnis Zahl.
- Urne: Ergebnismenge {Lila}; Ereignis {Lila; Orange}; Ergebnis Orange
- Münze: Ergebnismenge {Kopf; Kante}; Ereignis {Kopf; Zahl; Kante}; Ergebnis Zahl

3 Fehler

Retardation

Aufgabe 1

Zwei handelsübliche, faire Würfel werden zufällig geworfen.

1. Gib eine Zufallsvariable mit zugehöriger Ergebnismenge an, sodass es sich bei dem Zufallsexperiment um ein Laplace-Experiment handelt.
2. Gib eine Zufallsvariable mit zugehöriger Ergebnismenge an, sodass es sich bei dem Zufallsexperiment nicht um ein Laplace-Experiment handelt.

AFB II

Aufgabe 2

Ermittle mit Hilfe einer empirischen Simulation, wie sich die relative Häufigkeit der theoretischen Wahrscheinlichkeit annähert und beschreibe damit die Aussagekraft von Statistik.

AFB IV

Aufgabe 3

Ein Würfel mit zwölf Seiten und der Ergebnismenge $E = \{1;\ 2;\ 3; \ldots; 12\}$ wird geworfen. Beschreibe die angegeben Ereignisse ausschließlich mit Worten. Gib jeweils das Gegenereignis an.

$A = \{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11\}$ $\quad$ $C = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12\}$

$B = \{1;\ 4;\ 9\}$ $\quad$ $D = \{1;\ 8\}$

AFB I

Aufgabe 4

Untersuche die Aussage 'Ein umögliches Ereignis kann nicht eintreten.' mit Hilfe einer diskreten Zufallsvariable. Eine Zufallsvaraible bezeichnen wir als diskret, wenn die Ergebnismenge unendlich viele Elemente besitzt.

AFB IV

Zwei LaPlace-Würfel A mit Ergebnismenge $S_1 = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ und B mit Ergebnismenge $S_2 = S_1$ werden zufällig geworfen. Eine Zufallsvariable X betrachtet für $a \in A$ und $b \in$:

$$X : (a, b) \to a \cdot b$$

Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und gib die Ereignisse in aufzählender Schreibweise an, wenn gilt: $T = \{\text{Quadratzahl}\};\ R = \{\text{Gerade Zahl}\}$.

$A\ = \overline{T}$ $\qquad$ $C\ = T \cup \overline{R}$

$B\ = T \cap R$ $\qquad$ $D\ = \overline{T} \cap \overline{R}$

AFB II

Aufgabe 6

Erläutere den Unterschied zwischen den Begriffen 'Ereignis' und 'Ergebnis' mit Hilfe eines selbstgewählten Zufallsexperimentes.

AFB I

Aufgabe 7

Untersuche die Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt: 'Sind A und B Mengen, so gilt:

$$\overline{A} \cap B = (A \cup B) \setminus A$$

' (Das Symbol $\setminus$ steht für ein mengentehoretisches 'ohne'.)

AFB III

Zwei LaPlace-Würfel A mit Ergebnismenge $S_1 = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ und B mit Ergebnismenge $S_2 = S_1$ werden zufällig geworfen. Eine Zufallsvariable X betrachtet für $a \in A$ und $b \in$:

$$X : (a, b) \to a + b$$

Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und gib die Ereignisse in aufzählender Schreibweise an, wenn gilt: $T = \{\text{Primzahl}\};\ R = \{\text{Ungerade Zahl}\}$.

$A = \overline{T}$

$B = T \cap R$

$C = T \cup \overline{R}$

$D = \overline{T} \cap \overline{R}$

AFB II

Katastrophe

Lösung 6

Zufallsexperiment: Werfen einer Münze mit Ergebnismenge $E = \{$Kopf; Zahl; Kante$\}$. Ein mögliches Ergebnis ist ein einzelnes Ergebnis der Menge, also beispielsweise 'Kante'. Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge, die auch aus mehreren Ergebnissen bestene kann, also beispielsweise $\{$ Kante; Zahl $\}$.

Lösung 7

Es gilt für die linke Seite:

$$\overline{A} \cap B = B \setminus A$$

Außerdem gilt gür die rechte Seite:

$$(A \cup B) \setminus A = A \setminus A \cup B \setminus A = B \setminus A$$

Die Aussage ist also wahr. [Veranschaulichung mit Venndiagramm hilft der Vorstellung]

Lösung 8

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Für die Ereignisse gilt:

$$A = \{4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 10;\ 12\}$$

$$B = \{3;\ 5;\ 7;\ 11\}$$

$$C = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11;\ 12\}$$

$$D = \{2\}$$