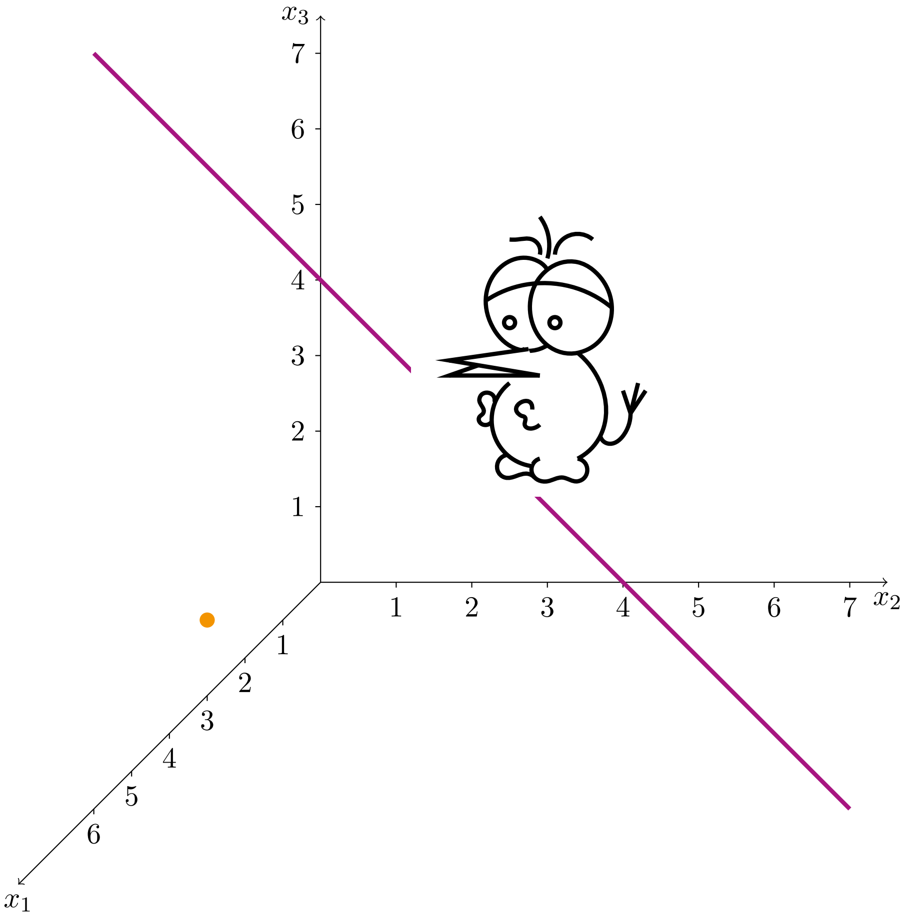
mathematikganj2-bpe16.4bpe16.5-abstandsberechnung

Exposition

Ein Vogel fliegt auf einer geradlinigen Flugbahn f . Überlege, wie weit seine Flugbahn von seinem Vogelnest $V(3|0|1)$ entfernt ist, wenn gilt:

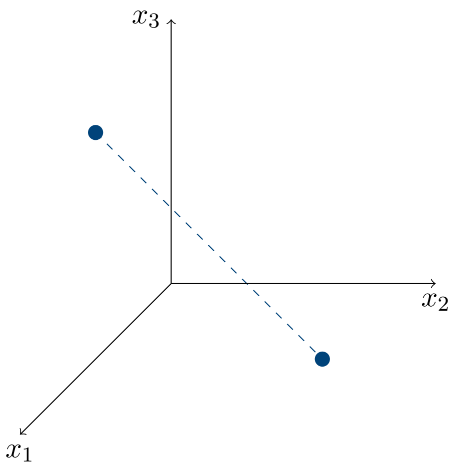
$$f : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



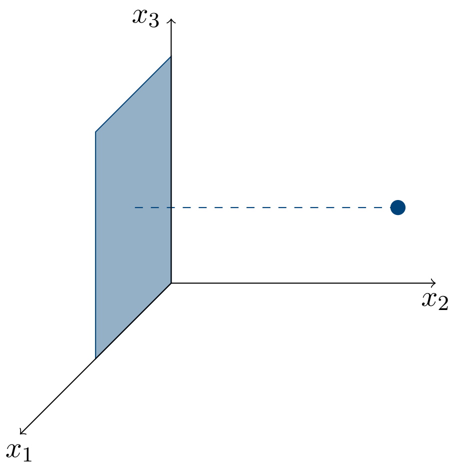
Komplikation

Wir berechnen *Abstände* zwischen geometrischen Objekten:

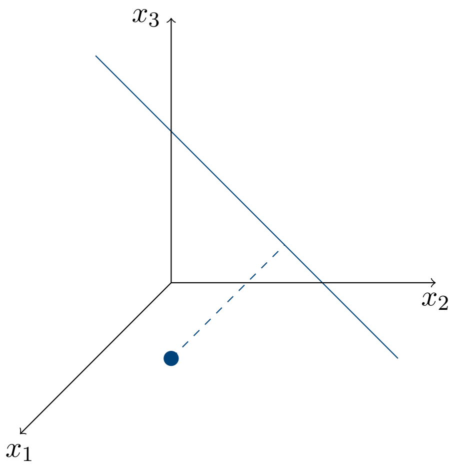
- *Punkt und Punkt*:



- *Punkt und Koordinatenebene*:



- *Punkt und Gerade*:



Peripetie

Beispiel 1

Berechne den Abstand der Punkte $A(2|1|3)$ und $B(4|-1|3)$.

Es gilt für den Abstand $d_{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (1-1)^2 + (3-3)^2} = 2$

1 Fehler

Beispiel 2

Gib den Abstand des Punktes $A(3|0|7)$ von der x_2x_3-Ebene an.

Der Abstand ist $d = 7$.

1 Fehler

Beispiel 3

Berechne den Abstand des Punktes A von der Geraden g, wenn gilt:

$$A(3|0|7); \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der allgemeine Punkt der Geraden g lautet:

$$G(1-r|4-2\cdot r|1+r)$$

Somit gilt für den Abstandsvektor $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1-r-3 \\ 4-2\cdot r-0 \\ 1+r-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-r \\ 4-2\cdot r \\ -6+r \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor muss 0 geben:

$$(-2-r)\cdot(-1) + (4-2\cdot r)\cdot(-2) + (-6+r)\cdot 1 = 0 \rightsquigarrow r = 2$$

Einsetzen in den Abstandsvektor und berechnen des Abstandes liefert:

$$d = \left| \begin{pmatrix} -2-2 \\ 4-2\cdot 2 \\ -6+2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{42}$$

1 Fehler

Retardation

Aufgabe 1

Skizziere das Dreieck ABC mit $A(2|0|3)$; $B(3|3|1)$ und $C(0|4|2)$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Berechne seinen Umfang.

AFB I

Aufgabe 2

Berechne den Abstand des Punktes A von der Geraden g, wenn gilt:

$$A(5|1|1); \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AFB II; TR

Aufgabe 3

Berechne den Abstand des Geraden g von der Geraden h, wenn gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

AFB III; TR

Ein Spielwürfel hatte ursprünglich die Form eines geometrischen Würfels W. Durch häufiges Spielen deformierte er bei gleichbleibendem Volumen V zu einem Quader Q. Dieser Quader kann modelliert werden durch den Eckpunkt $Q_1(1|2|4)$ und den Koordinatenursprung als Mittelpunkt.

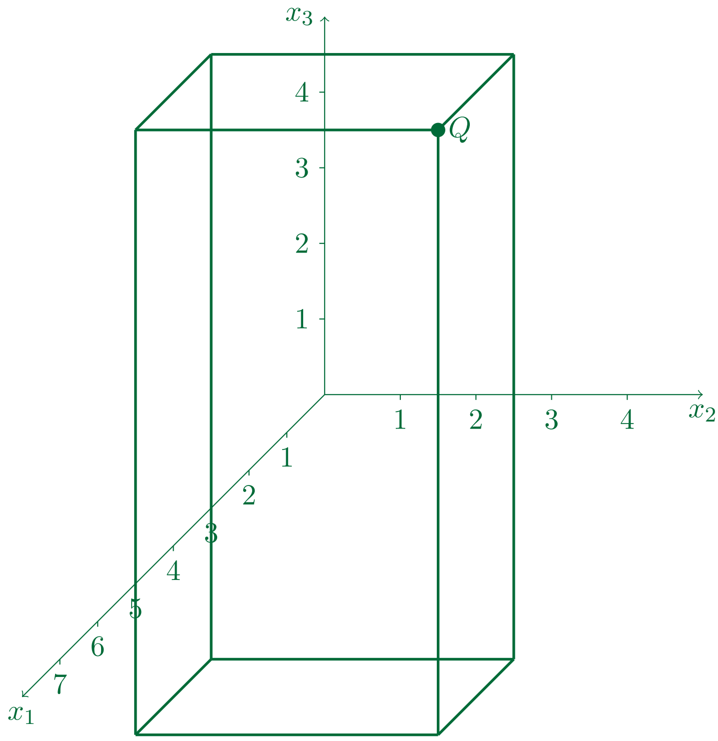
1. Skizziere Q in ein geeignetes Koordinatensystem. Gib den Wert von V an.
2. Begründe, dass $W_1(2|2|2)$ ein möglicher Eckpunkt von W ist, wenn man den Koordinatenursprung als Mittelpunkt von W wählt.
3. Gib das Verhältnis der Längen der Raumdiagonalen von W und Q an.

AFB II; TR

Katastrophe

Lösung 4

1. $V_Q = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$



2. Aufgrund der Ursprungssymmetrie sind die Seitenlängen des Würfels doppelt so lang wie die Koordinaten des Eckpunktes W_1, also gilt:

$$V_W = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 = V_Q$$

3. Die Raumdiagonalen sind doppelt so lang wie der Abstand der Eckpunkte zum Ursprung. Taschenrechner liefert:

$$d_W = 2\sqrt{12}; \qquad d_Q = \sqrt{84}$$

Das Verhältnis ist der Quotient aus den beiden Werten:

$$0,76$$