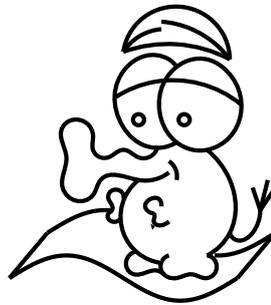




mathematikganj2-bpe16.3-ebenengleichung

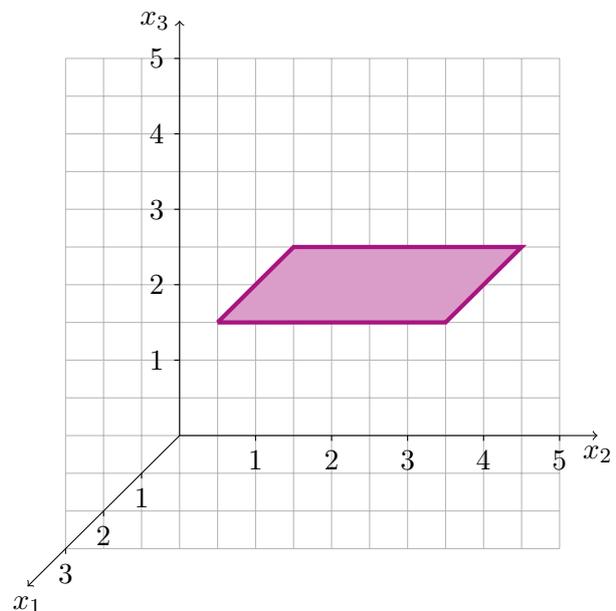
Exposition

Ein Teppichhändler besitzt einen Teppichhandel für fliegende Teppiche. Ein Teppich T fliegt ihm davon. Überlege, welchen Zusammenhang es zwischen der Linearkombination und der Skizze gibt und auf welcher Höhe sich der Teppich befindet im Verhältnis zur x_1x_2 -Ebene befindet.

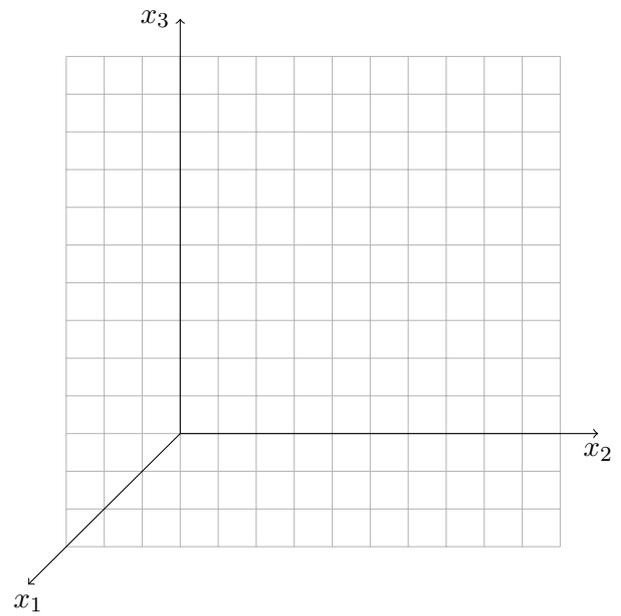


$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

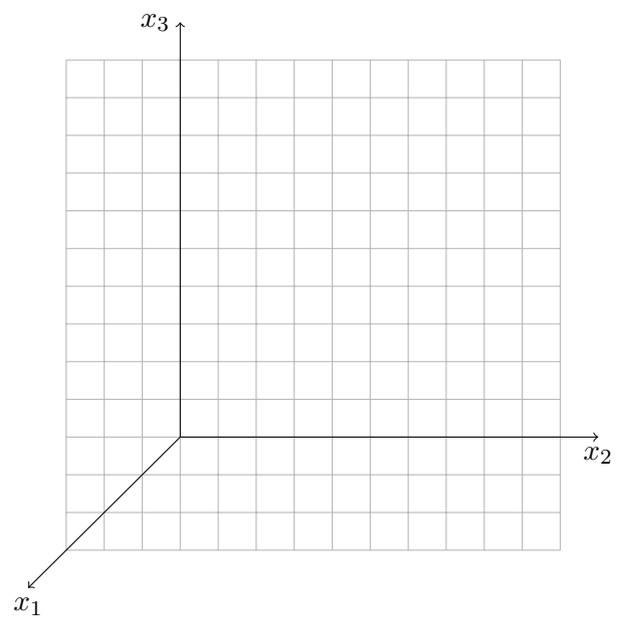
$$a; b \in [0; 1]$$



Wir definieren die *Parameterform einer Ebene E*:



Wir definieren die *Spurpunkte* und die *Spurgerade* einer Ebene:



Beispiel 1

Gib die Ebenengleichung einer Ebene E an, die durch die Punkte $P(2|3|2)$; $Q(1|4|1)$ und $R(3|5|7)$ geht und untersuche, ob der Punkt $A(2|6|7)$ auf der Ebene E aus liegt.

Eine mögliche Ebenengleichung:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punktprobe (es wird der Ortsvektor von A für \vec{x} eingesetzt) liefert $r = s = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

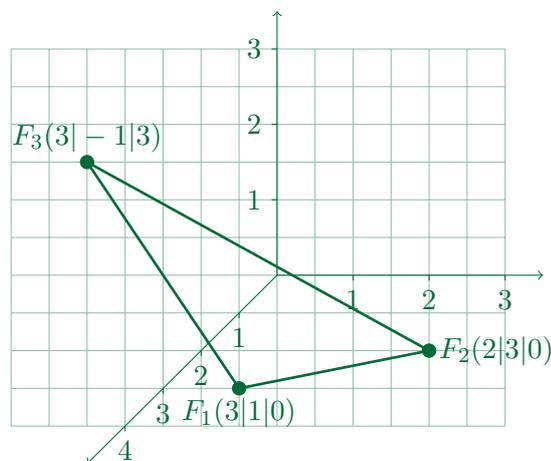
Also liegt A auf E .

1 Fehler

Beispiel 2

Gib drei Punkte an, die auf der Ebene F liegen und skizziere die Ebene in ein Koordinatensystem, wenn gilt:

$$F : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



1 Fehler

Gegeben sind die Punkte $P(3|2|4)$; $Q(7|2|3)$; $R(3|2|5)$ und $S(3|2|42)$, sowie die Geraden g und h mit:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Gib die Parametergleichung einer Ebene E an, die durch die Punkte P ; Q und R geht. Überprüfe, ob der Punkt S auf E liegt. Beschreibe die Lage von E im Koordinatensystem.
2. Gib die Parametergleichungen einer Ebene F an, die von P und g aufgespannt wird.



Aufgabe 2

Ermittle mit Hilfe der Spurdreiecke zeichnerisch die Schnittgerade der Ebenen E und F . Gib die Spurgeraden an, die in der x_1x_2 -Ebene liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

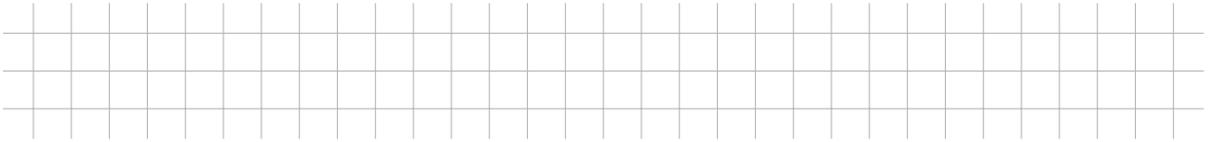
AFB II



Aufgabe 3

Gib die Parametergleichung einer Ebene E an, die die x_1 -Achse bei 3, die x_2 -Achse bei 4 und die x_3 -Achse bei 5 schneidet.

AFB I



Aufgabe 4

Zeige, dass die Geraden g und h auf einer gemeinsamen Ebene E liegen und gib eine Parametergleichungen dieser Ebene an.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 5

Die Flugbahn eines am Nachthimmel abstürzenden Kometen kann modelliert werden durch die Gerade k mit:

$$k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 45 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Erdoberfläche im Bereich der Einsturzstelle kann modelliert werden durch die Ebene E mit:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne die Einsturzstelle.

AFB III



Eine mögliche Ebenengleichung lautet:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Geraden liegen auf einer gemeinsamen Ebene, da der Stützpunkt von h für $r = 1$ auf g liegt. (Alternativ: Gleichsetzten liefert Schnittpunkt). Eine mögliche Ebenengleichung lautet:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzten liefert:

$$\begin{aligned} 4 + r &= 1 \\ 1 &= 2s \\ 45 - r &= t \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Einsturzstelle für $r = -3$; $s = 0,5$; $t = 48$ bei $K(1|1|48)$.