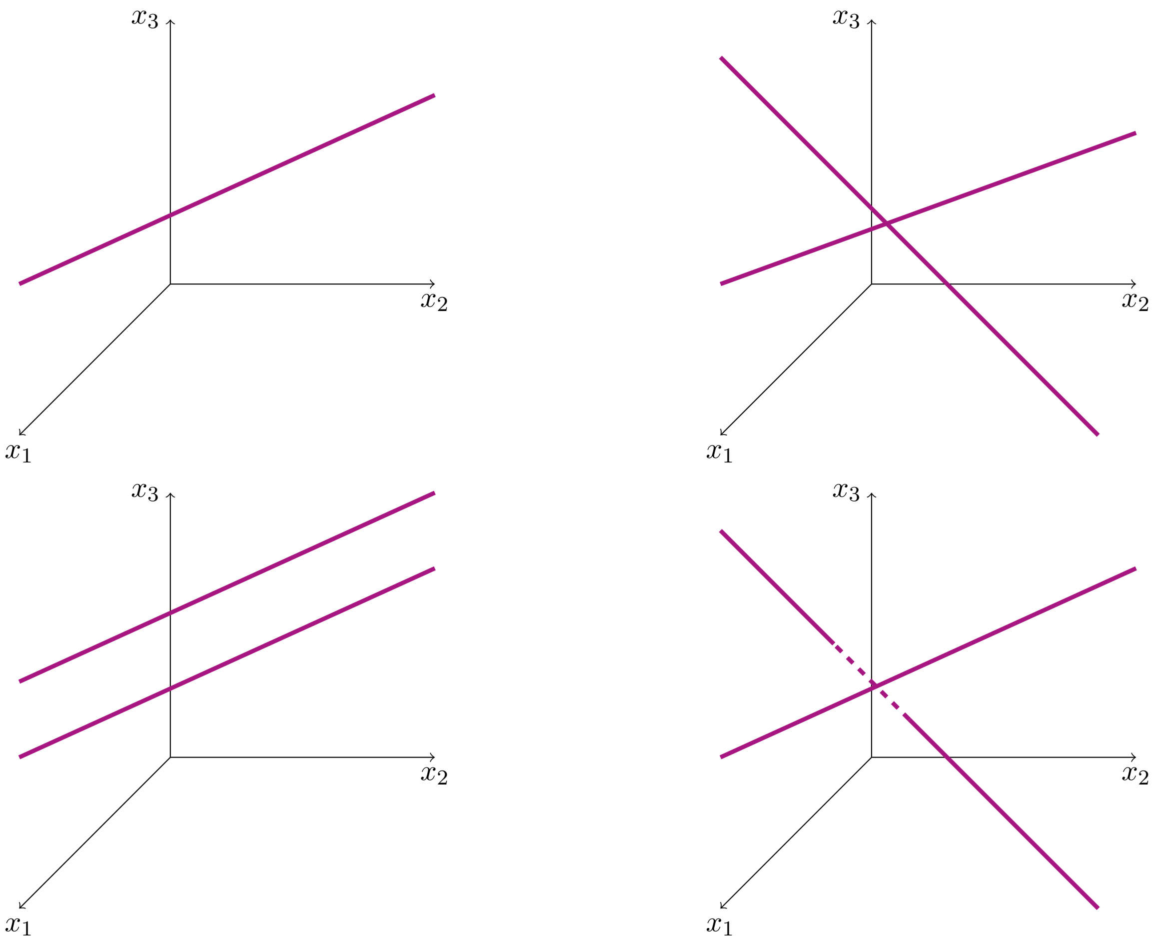
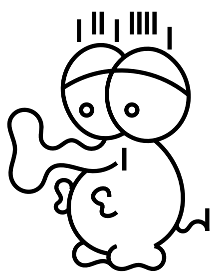
mathematikganj2-bpe16.2-lagebeziehung

Exposition

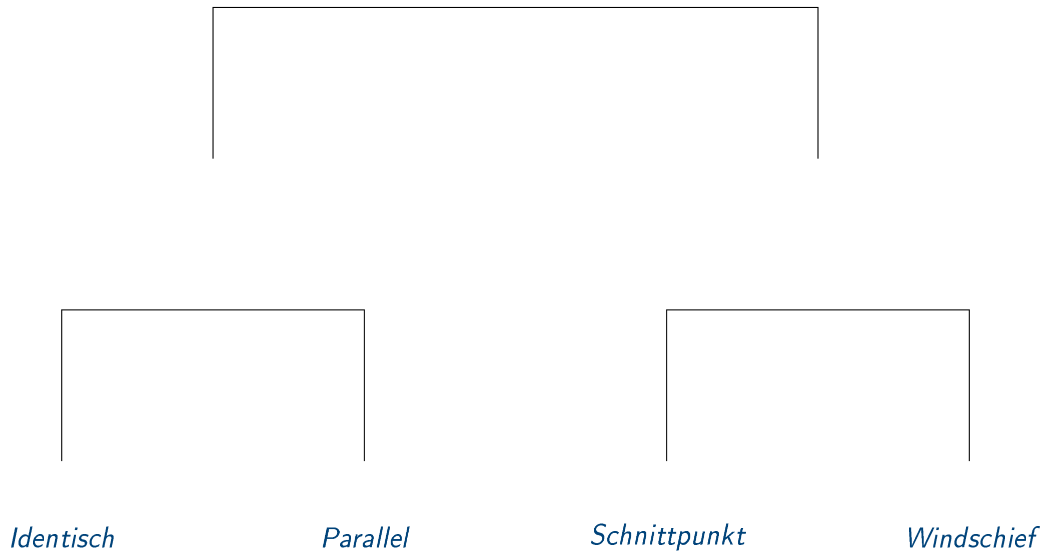
Überlege, welche welche Lage (Schnittpunkt, Identisch, Parallel, Windschief) die Geradenpaare jeweils haben.





Komplikation

Wir unterscheiden vier *Lagebeziehungen*:



Wir berechnen den *Schnittwinkel zwischen zwei Geraden*:

$$\cos(\alpha) =$$

4229112024131268702

Peripetie

Beispiel 1

Gib jeweils die Lagebeziehung des Geradenpaares an.

1. $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 42 \end{pmatrix}$$

3. $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 42 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$t \in \mathrm{R}$$

1. Identisch
2. Schnittpunkt
3. Parallel
4. Windschief
5. Für $t = 1$ Identisch, sonst Schnittpunkt.

1 Fehler

Ermittle die Lagebeziehung der Geraden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen, da es kein $a \in \mathrm{R}$ gibt, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Überprüfen auf einen Schnittpunkt durch Gleichsetzen:

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 + 4 \cdot s \\ -1 + r &= 1 + s \\ 3 &= 2 \end{aligned}$$

  Auflösen der ersten Gleichung nach s liefert $s = -0,25$, eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$-1 + r = 1 - 0,25$$

  Also ist $r = 0,25$. Das bedeutet, dass die Geraden sich schneiden.

- Berechnen des Schnittpunktes S durch einsetzten von r in g liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,75 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  Also ist S gegeben durch:

$$S(1| - 0,75|3)$$

1 Fehler

Retardation

Aufgabe 1

Gegeben ist die Gerade g mit:

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gib eine Gerade h an, die Identisch zu g liegt.
2. Gib eine Gerade h an, die Parallel zu g liegt.
3. Gib eine Gerade h an, die g in $P(1|-1|3)$ schneidet.
4. Gib eine Gerade h an, die windschief zu g liegt.

AFB I

Aufgabe 2

Ermittle die Lagebeziehung der Geraden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

AFB I

Aufgabe 3

Gib die Lagebeziehung der Geraden an und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

AFB II

Aufgabe 4

Ermittle die Lagebeziehung der Geraden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -3,25 \\ -4 \end{pmatrix}$$

AFB III

Zwei Hagelkörner H_1 und H_2 fallen vom Himmel. Ihre Flugbahnen h_1 und h_2 werden als Geraden modelliert. H_1 startet in $S_1(1|1|100)$ und fliegt mit 20 Metern pro Sekunde in Richtung des Punktes $P(3|3|42)$. H_2 startet in $S_2(5|5|120)$ und fliegt in Richtung $\vec{r_2}$ mit:

$$\vec{r_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -39 \end{pmatrix}$$

Alle Längeneinheiten in Meter.

1. Gib die Geradengleichungen der Flugbahnen an, zeige dass sie einen Schnittpunkt haben und gib den Winkel an, in dem sie sich schneiden.
2. Berechne wie schnell H_2 fliegen müsste, damit die Hagelkörner sich treffen.
3. Ermittle näherungsweise den kleinstmöglichen Abstand der Hagelkörner, wenn H_2 mit einer Geschwindigkeit von 10 Metern pro Sekunde fliegt.

AFB I; AFB II; AFB III; TR; FS

Katastrophe

Lösung 5

1. Die Flugbahnen können modelliert werden durch:

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -58 \end{pmatrix}; \qquad h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 120 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -39 \end{pmatrix}$$

   P ist der Schnittpunkt für $s = 2$. [Alternativ: Gleichsetzten]

   Taschenrechner liefert den Winkel $\alpha \approx 4,9$ [Taschenrechner auf DEG, $\arccos$ benutzen und erst am Ende runden]

2. Abstände jeweils vom Startpunkt zum Schnittpunkt liefert der Taschenrechner:

$$d_{H_1} \approx 58,1 \qquad d_{H_2} \approx 78,1$$

   Somit benötigt H_1 für die Strecke etwa $2,9$ Sekunden. Somit müsste H_2 $78,1$ Meter in $2,9$ Sekunden zurücklegen, was etwa $26,9$ Metern pro Sekunde entspricht.

3. Bilden der allgemeinen Punkte in Abhängigkeit von der Zeit liefert ungefähr:

$$H_1(1 + 0,68t|1 + 0,68t|100 - 19,72t); \qquad H_2(5 - 0,26t|5 - 0,26t|120 - 10.14t)$$

   Somit gilt für den Abstand:

$$d(t) = \sqrt{(4 + 0,96t)^2 \cdot 2 + (-20 - 9.58t)}$$

   Wertetabelle [alternativ Tiefpunkt bestimmen (Ableiten oder Scheitel der Parabel)] liefert $d_{min} \approx 1,93$.