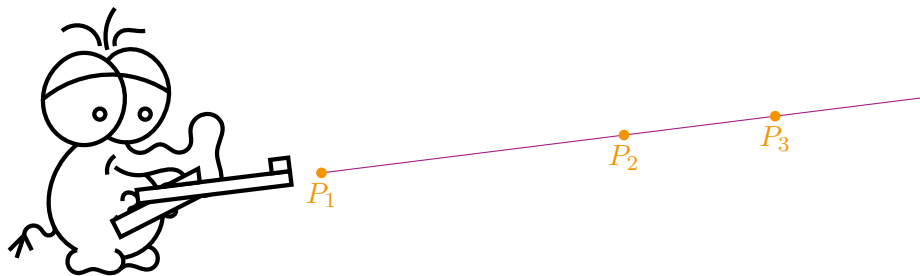




mathematikganj2-bpe16.1-geradengleichung

Exposition

Die **Flugbahn des Schusses** eines Schießprügels wird modelliert. Die Schießprügelmündung befindet sich im Punkt $M(1|1|2)$. Die Positionen P_1 , P_2 und P_3 der Schießprügelschüsse lassen sich wie angegeben berechnen. Überlege, wie die Berechnungen zustande kommen und welche geometrische Bedeutung die Vektoren jeweils haben.



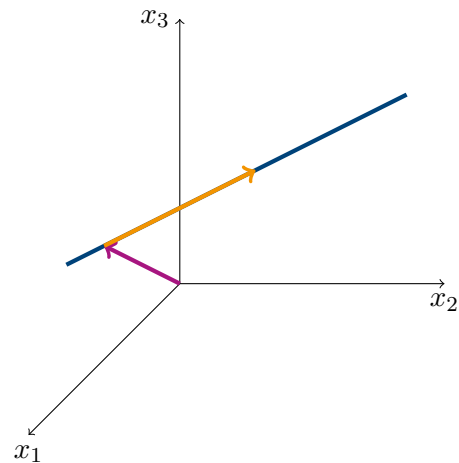
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,125 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,125 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,125 \end{pmatrix}$$

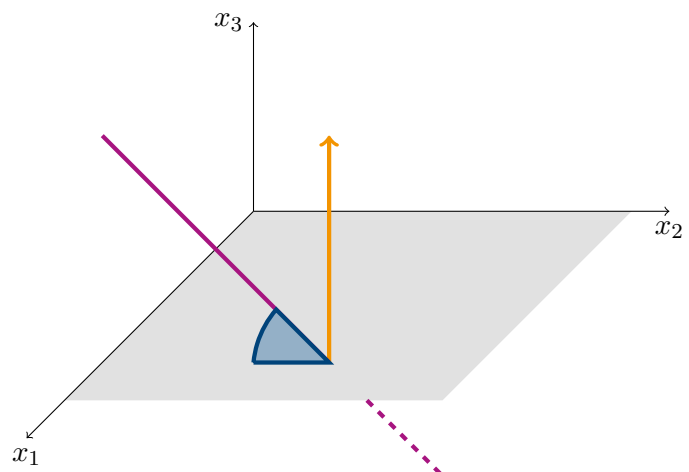
Wir definieren eine *Gerade* g mit Hilfe von *Stützvektor* und *Richtungsvektor* als Menge aller Ortsvektoren $\vec{x}$, für die für $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$g : \vec{x} =$$



Wir berechnen den *Winkel* α zwischen einer *Geraden* und einer der *Koordinatenebenen* mit:

$$\sin(\alpha) =$$



Dabei ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor, der senkrecht auf der entsprechenden Koordinatenebene steht. Der Punkt, in dem die Gerade die Ebene schneidet, bezeichnen wir als *Spurpunkt*.

Untersuche ob der Punkt $P(2|3|2)$ auf der Geraden g liegt, wenn gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

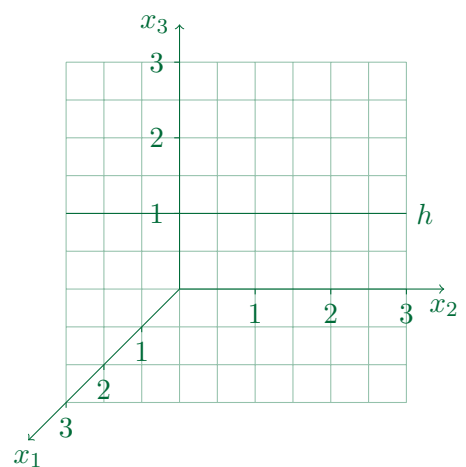
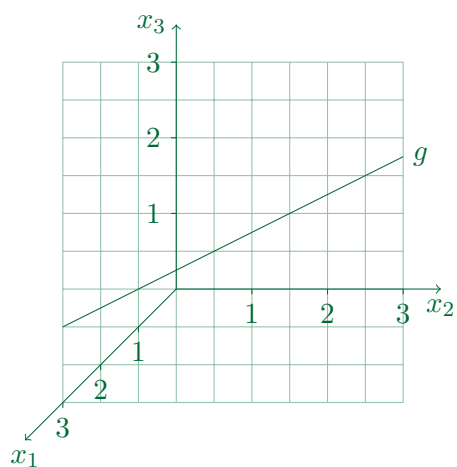
P liegt auf g , da für $s = 1$ gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 Fehler

Skizziere die Geraden g und h jeweils in ein geeignetes Koordinatensystem, wenn gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



2 Fehler

Beispiel 3

Berechne den Winkel zwischen der Geraden g und der x_2x_3 -Ebene, wenn gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen des Richtungsvektors und $\vec{n}$ in die Winkelformel liefert:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 0,5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

Taschenrechner liefert mit Hilfe des arcsin die Lösung $\alpha = 42^\circ$.

2 Fehler

Beispiel 4

Berechne die Spurpunkte der Geraden g mit den Koordinatenebenen, wenn gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g schneidet die x_2x_3 -Ebene mit der Ebenengleichung:

$$E_{x_2x_3} : x_1 = 0$$

Also gilt $1 + s \cdot (-1) = 0$. Also ist $s = 1$. Einsetzen von s in die Geradengleichung liefert:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Somit ist der gesuchte Spurpunkt bei $S(0|3|3)$.

1 Fehler

Bestimme, welcher Punkt auf welcher Geraden liegt.

$$A(2|0,5|1,5); \quad B(-5|4|-6); \quad C(2,25|0,625|1,5)$$

$$D(-2|2|-2); \quad E(4|8,5|9,5); \quad F(-0,5|1|0)$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,125 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AFB I

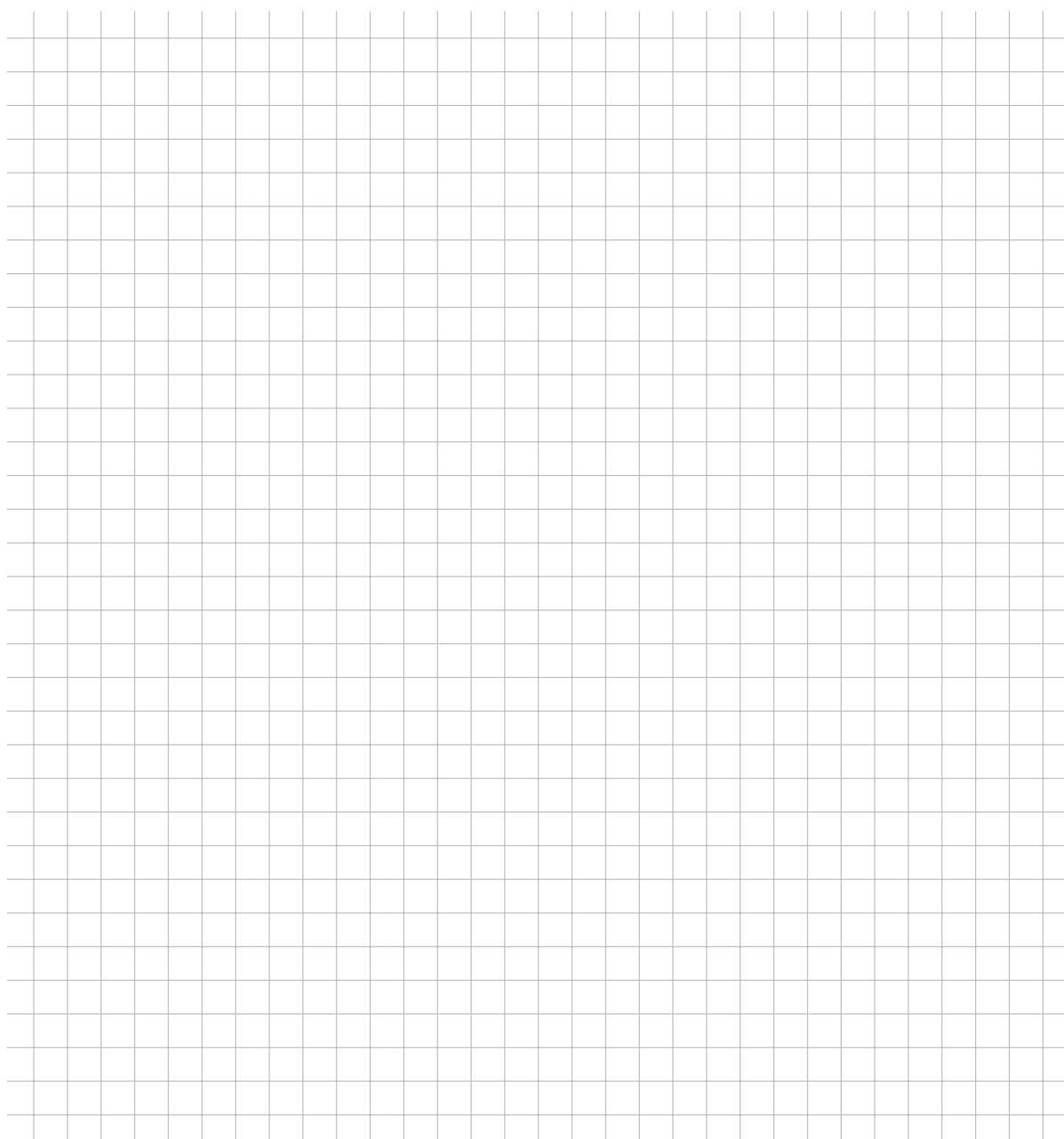


Aufgabe 2

Skizziere die angegebenen Geraden in ein geeignetes Koordinatensystem und gib alle möglichen Spurpunkte an.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad i : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

AFB II

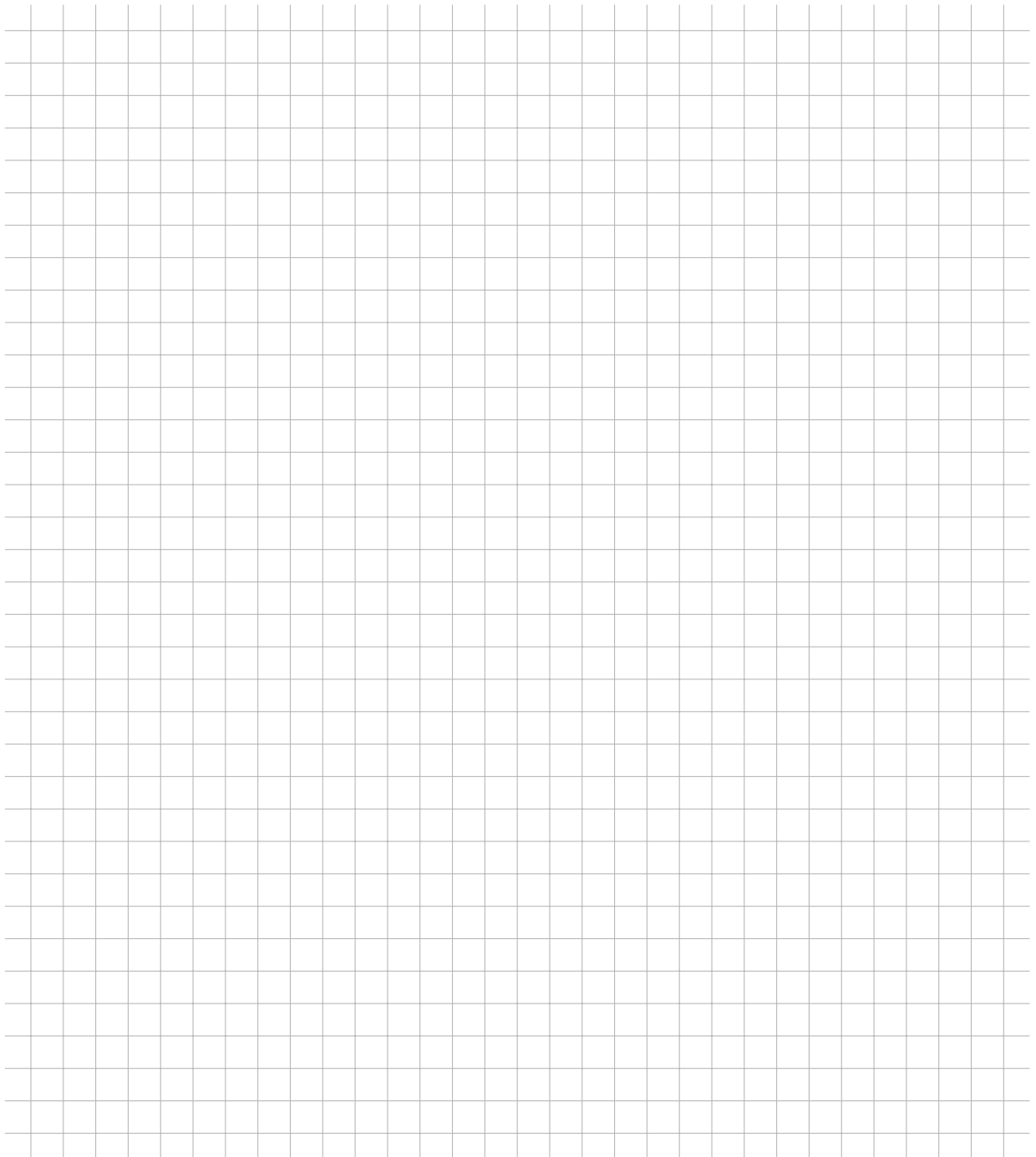


Aufgabe 3

Ermittle alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die angegebene Gerade mit einer Koordinatenebene einen Winkel von 42° einschließt.

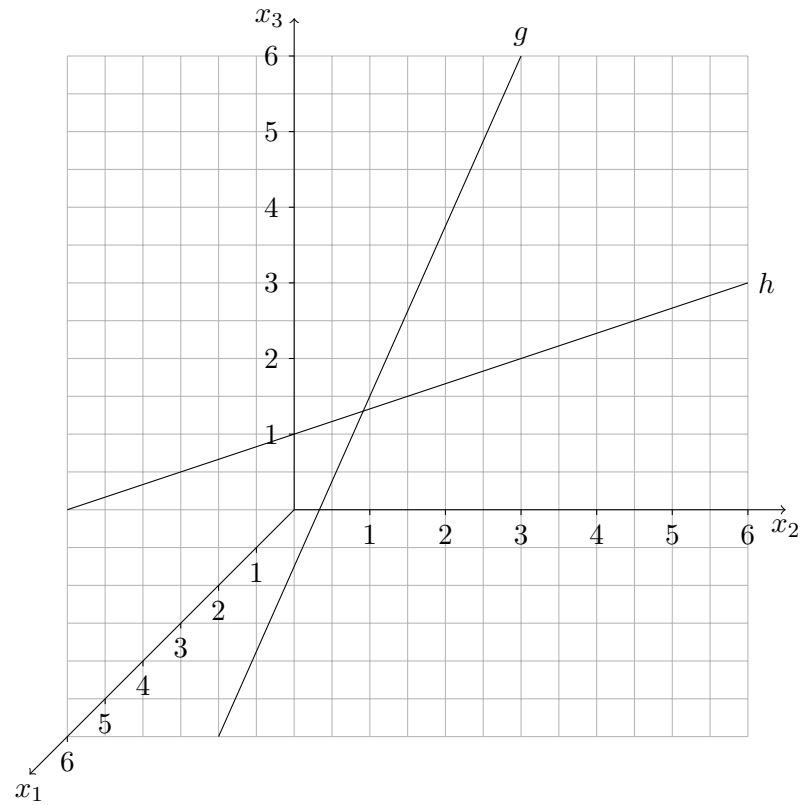
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

AFB III



Aufgabe 4

Ermittle zu den skizzierten Geraden jeweils eine mögliche Geradengleichung und berechne jeweils den Schnittwinkel mit der x_1x_2 -Ebene.



AFB II

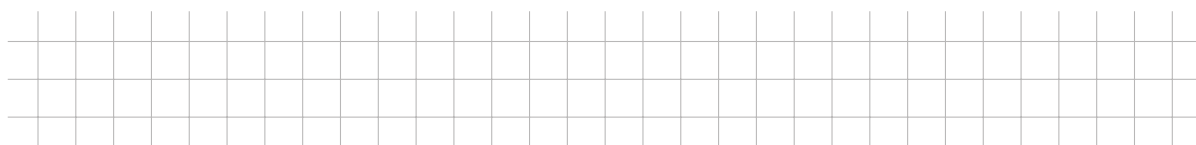


Aufgabe 5

Gib $a \in \mathbb{R}$ an, sodass der Punkt $Q(1|2|a)$ auf der Geraden g liegt, wenn gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AFB II

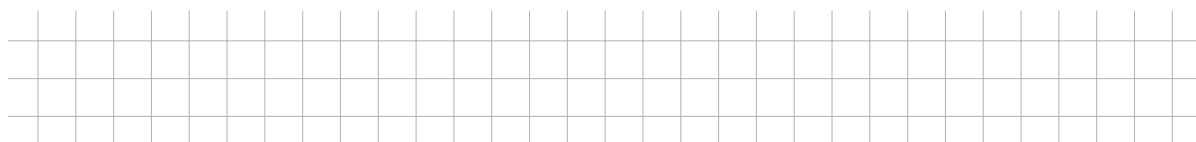


Aufgabe 6

Gib den gemeinsamen Spurpunkt der Geraden g und h an.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

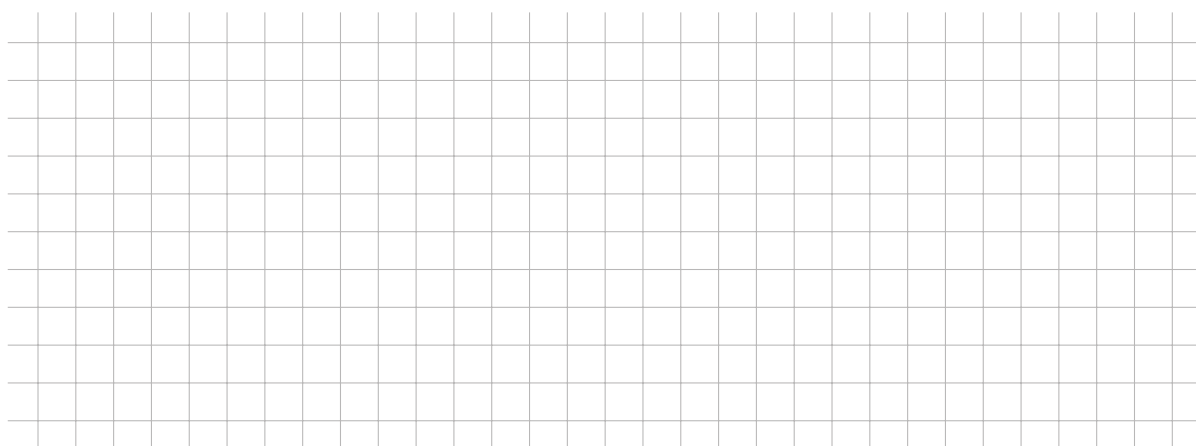
AFB II



Aufgabe 7

Erläutere, inwiefern eine zeichnerische Punktprobe nicht möglich ist.

AFB III



Es gilt $a = 5$. [Da gilt $r = 2$.]

Der Gemeinsame Spurpunkt ist $S(3|3|0)$. [Der Stützpunkt von g wird von h mit $s = 1$ erreicht.]

Die Gerade g und der Punkt $P(1|1|0,5)$ liegen zeichnerisch übereinander, wenn gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P liegt nicht auf g , da es kein $s \in \mathbb{R}$ für den Ortsvektor von P gibt.