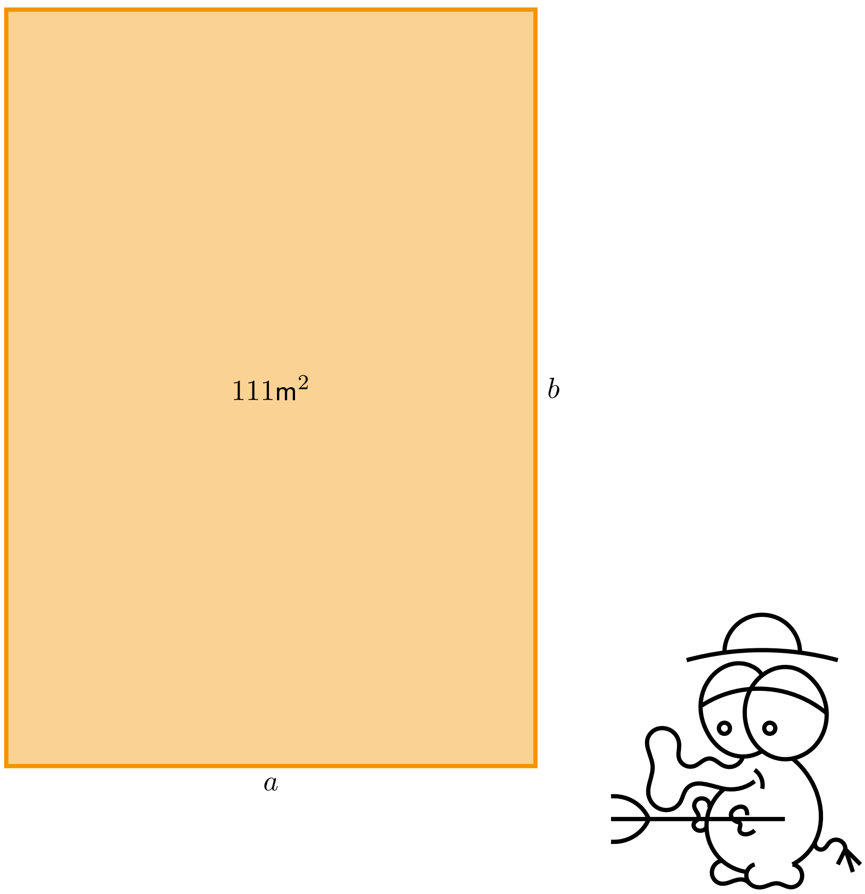
mathematikeingangslasse-bpe1.1a-zahlbereichserweiterung

Exposition

Ein Bauer hat einen 42m langen Zaun. Damit will er eine rechteckiges Feld umzäunen. Er modelliert das Problem mit den Seitenlängen $a, b \in \mathbb{Z}$. Gib mögliche Seitenlängen a und b an, sodass das Feld einen Flächeninhalt von 111m^2 hat. Überlege, was mögliche Werte für a und b sind.



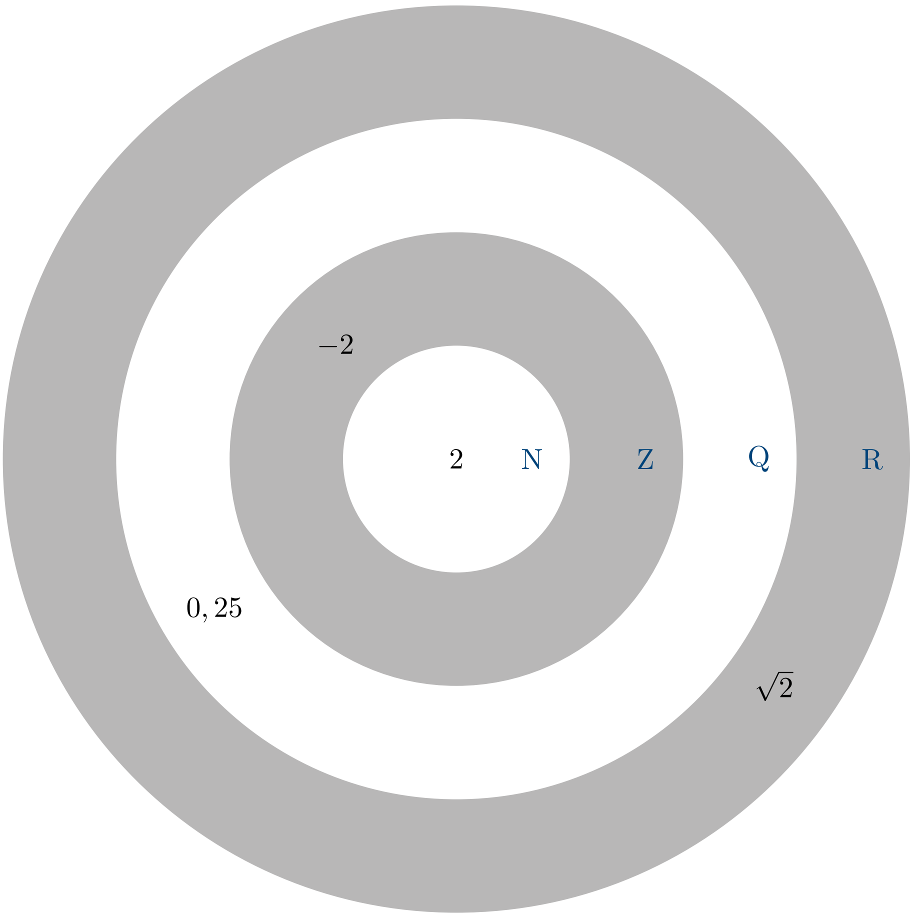
Komplikation

Wir definieren die vier *Zahlenmengen* N, Z, Q und R :

$$\begin{aligned}
\textit{natürliche Zahlen } \mathrm{N} &= \{\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ldots\} \\
\textit{ganze Zahlen } \mathrm{Z} &= \{\ \ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ldots\ \} \\
\textit{rationale Zahlen } \mathrm{Q} &= \{\ \text{Alle Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen.}\ \} \\
\textit{reelle Zahlen } \mathrm{R} &= \{\ \text{Alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl.}\ \}
\end{aligned}$$

Die Zugehörigkeit einer Zahl zu einer Zahlenmenge stellen wir dem Elementsymbol dar:

$\in$ 'gehört zu'; $\notin$ 'gehört nicht zu'



[Die reellen Zahlen können wir in der Zahlenebene erweitern zu den komplexen Zahlen, die uns einen rechnerischen Umgang mit negativen Wurzeln ermöglichen.]

Peripetie

Beispiel 1

Gib an, welche der Aussagen wahr sind.

1. $3 \in \mathrm{N}$
2. $-3 \in \mathrm{Q}$
3. $0,3 \in \mathrm{Z}$
4. $\sqrt{3} \in \mathrm{R}$

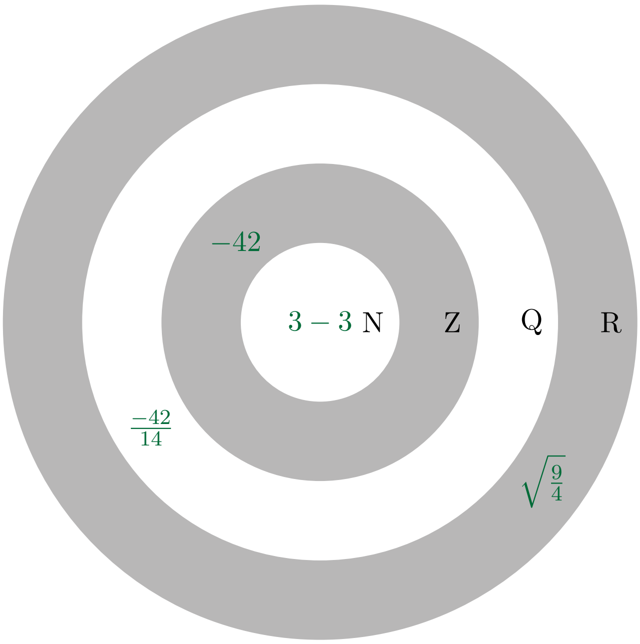
Alle Aussagen sind wahr.

1 Fehler

Beispiel 2

Notiere die Zahlenwerte möglichst weit Innen im Diagramm.

$$\frac{-42}{14}; \quad -42; \quad 3-3; \quad \sqrt{\frac{9}{4}}$$



2 Fehler

Beispiel 3

Untersuche den Wahrheitsgehalt der Aussage:

'Die Summe zweier Zahlen, ist nie eine ganze Zahl, wenn sie selbst keine ganzen Zahlen sind.'

Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Retardation

Aufgabe 1

Gib jeweils drei paarweise verschiedene Zahlen an, die die angegebene Eigenschaft erfüllen.

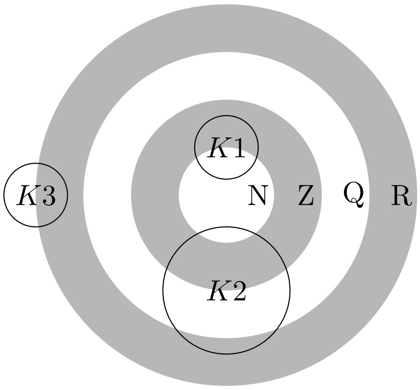
1. Element der natürlichen Zahlen.
2. Element der ganzen Zahlen.
3. Element der rationalen Zahlen.
4. Element der reellen Zahlen.
5. Element der ganzen Zahlen aber nicht der natürlichen Zahlen.
6. Element der reellen Zahlen aber nicht der ganzen Zahlen.
7. Kein Element der reellen Zahlen.

AFB I

Aufgabe 2

Entscheide, welche Menge zu welchem Kreis gehört.

$$A = \{3;\ -3;\ 0\}$$
$$B = \{\sqrt{-3};\ \pi\}$$
$$C = \{1;\ -1;\ 0,5;\ \sqrt{5}\}$$



AFB II

Gib jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

1. $7 - 10 \in \mathrm{N}$
2. $0,4 - 2 \in \mathrm{Z}$
3. $\sqrt{1000} \in \mathrm{Q}$
4. $\sqrt{-1} \in \mathrm{R}$
5. $10 + 0,1 \in \mathrm{N}$
6. $\sqrt{-9} \in \mathrm{Z}$
7. $\mathrm{e} + \pi \in \mathrm{Q}$
8. $0^0 \in \mathrm{R}$
9. $\sqrt{64} \notin \mathrm{N}$
10. $7 - 49 \notin \mathrm{Z}$
11. $\sqrt{0,01} \notin \mathrm{Q}$
12. $\sqrt{7-2} \notin \mathrm{R}$
13. $42 \cdot 1 \cdot 0 \notin \mathrm{N}$
14. $0,9 - 0,4 \in \mathrm{Z}$
15. $\sqrt{64+4} \in \mathrm{Q}$
16. $\sqrt{-1000} \in \mathrm{R}$
17. $\sqrt{49} \notin \mathrm{N}$
18. $\sqrt[3]{-27} \notin \mathrm{Z}$
19. $\mathrm{e} - \mathrm{e} \notin \mathrm{Q}$
20. $42 \notin \mathrm{R}$
21. $\sqrt{9+16} \notin \mathrm{N}$
22. $-\sqrt{121} \notin \mathrm{Z}$
23. $\sqrt{0,25} \notin \mathrm{Q}$
24. $2 \cdot \mathrm{e} - \mathrm{e} \notin \mathrm{R}$
25. $0,\overline{9} \notin \mathrm{N}$
26. $\sqrt{81} - \sqrt{144} \notin \mathrm{Z}$
27. $2^0 \notin \mathrm{Q}$
28. $2^0 - 0^2 \notin \mathrm{R}$
29. $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \in \mathrm{N}$$
30. $$\frac{-3}{2} + \frac{2}{3} \in \mathrm{N}$$
31. $$\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9} \in \mathrm{N}$$
32. $$\frac{42}{14} + \frac{42}{3} - \frac{36}{2} \in \mathrm{N}$$
33. $$\frac{-3}{9} + \frac{2}{-6} - \frac{13}{39} \notin \mathrm{Z}$$
34. $$\frac{0}{5} + \frac{5}{1} \notin \mathrm{Z}$$
35. $$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{-4} \notin \mathrm{Z}$$
36. $$\frac{7}{2} : \frac{4}{14} \notin \mathrm{Z}$$
37. $$\frac{1}{2} + \frac{3}{-2} \cdot \frac{4}{5} \notin \mathrm{R}$$
38. $$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{-2}\right) \cdot \frac{4}{5} \notin \mathrm{R}$$
39. $$\frac{3}{4} : \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \notin \mathrm{R}$$
40. $$\frac{\pi}{e} \notin \mathrm{R}$$
41. $$\sqrt{3} \notin \mathrm{Q}$$
42. $$1 \in \mathrm{N}$$

AFB II

Aufgabe 4

Begründe, dass $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist, indem du eine Gegenannahme formulierst und solange Operationen an der dabei entstandenen Gleichung durchführst, bis du zu einem Widerspruch kommst.

AFB IV

Aufgabe 5

Zeige mit Hilfe der Abbilung, dass die Zahlenmengen $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gleich groß sind.

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$				
1	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	-1	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\cdots$
3	2	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	-2	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	

AFB III

Aufgabe 6

Gib jeweils an, zu welchen bekannten Zahlenmengen das Ergebnis gehört.

1. $$3 \cdot 14$$
2. $$-6 \cdot (-7)$$
3. $$\frac{84}{3} \cdot \frac{3}{2}$$
4. $$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{21})^2$$
5. $$\frac{-42}{3} - \frac{42}{3} + \frac{42}{-3}$$
6. $$-(84 - 42)$$
7. $$6 \cdot \frac{49}{-7}$$
8. $$-3 \cdot \sqrt{196}$$
9. $$\frac{1}{84} + \frac{1}{84}$$
10. $$\frac{1}{7} - \frac{5}{42}$$
11. $$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{14}$$
12. $$\frac{1}{7} : \frac{6}{1}$$
13. $$\sqrt{\sqrt{289} + \sqrt{400} + \sqrt{25}}$$
14. $$\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$$
15. $$\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{196}}$$
16. $$\sqrt{42 \cdot 1}$$

AFB I

Aufgabe 7

Gib für $a \in \mathrm{N}$ und $b \in \mathrm{Z}$ jeweils an, ob die Aussagen (für alle möglichen a und b) wahr oder falsch sind.

1. $-15 \cdot b \in \mathrm{Z}$
2. $(a - a) : b \in \mathrm{Z}$
3. $15 \cdot b \in \mathrm{Z}$
4. $a - 1000 \in \mathrm{Z}$
5. $a : b \in \mathrm{Z}$
6. $a + b \in \mathrm{N}$
7. $700 \cdot b \in \mathrm{N}$
8. $a : b \in \mathrm{N}$

AFB II

Besondere natürliche Zahlen sind die Primzahlen. Eine Zahl $p \in \mathrm{N}$ ist dann und nur dann eine Primzahl, wenn gilt:

$$p \text{ hat genau zwei Teiler}$$

Besondere natürliche Zahlen sind die Quadratzahlen. Eine Zahl $a \in \mathrm{N}$ ist dann und nur dann eine Quadratzahl, wenn es eine weitere Zahl $b \in \mathrm{N}$ gibt, sodass gilt:

$$a = b \cdot b$$

Untersuche damit den Wahrheitsgehalt der Aussagen.

1. Die kleinste Primzahl ist 1.
2. 91 ist eine Primzahl.
3. Es gibt keine Primzahl, die größer als 400 ist.
4. Es gibt keine Möglichkeit die Zahl 420 als Produkt von ausschließlich Primzahlen zu schreiben.
5. 196 ist eine Quadratzahl.
6. 125 ist eine Quadratzahl.
7. Es gibt keine dreistellige Quadratzahl, die durch 100 teilbar ist.
8. Es gibt keine Quadratzahl, die gleichzeitig eine Primzahl ist.
9. Gilt $p \cdot p = a$, dann hat a keine weiteren Teiler außer p, wenn p Primzahl ist.
10. Der Quotient zweier unterschiedlicher Primzahlen ergibt nie eine natürliche Zahl.

AFB II

Katastrophe

Lösung 6

1. - 4. $42 \in \mathrm{N}$; Z; Q und R

5. - 8. $-42 \in \mathrm{Z}$; Q und R

9. - 12. $\frac{1}{42} \in \mathrm{Q}$ und R

13. - 16. $\sqrt{42} \in \mathrm{R}$

Lösung 7

1. - 4. wahr

5. - 8. falsch

Lösung 8

1. Falsch, da die 1 nur sich selbst als Teiler hat.
2. Falsch, da gilt: $13 \cdot 7 = 91$
3. Falsch. Gegenbeispiel ist 401.
4. Falsch: $420 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2$
5. Wahr: $14 \cdot 14 = 196$
6. Falsch: $11 \cdot 11 = 121$ und $12 \cdot 12 = 144$ und es ist $121 < 125 < 144$
7. Falsch: $400 = 20 \cdot 20$.
8. Wahr, da eine Primzahl ausschließlich sich selbst und die 1 als Teiler hat und wegen 1. beides nicht dasselbe sein kann.
9. Wahr, da sonst p keine weiteren Teiler hat.
10. Der Quotient zweier unterschiedlicher Primzahlen ergibt nie eine natürliche Zahl.
11. Wahr, da man den entstehenden Bruch nur mit 1 kürzen kann.