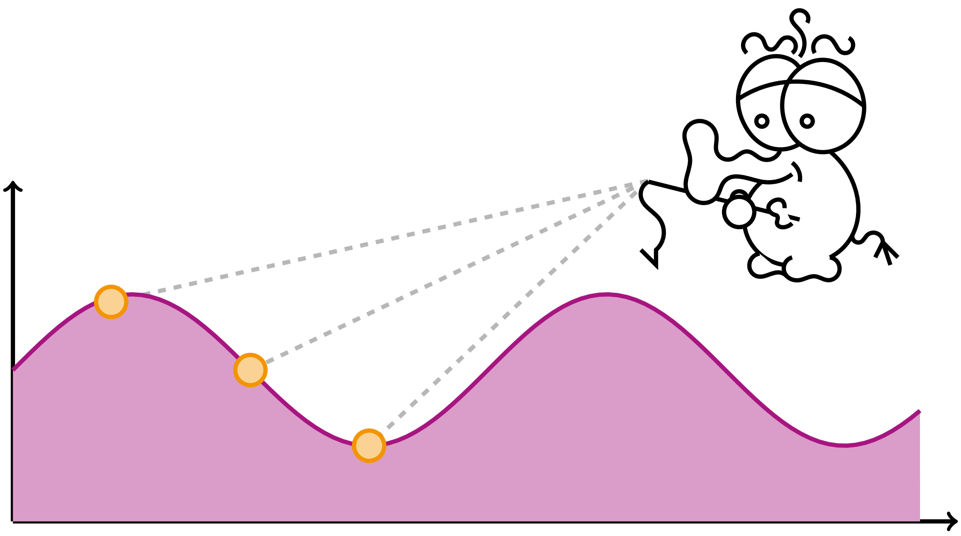
mathematikeanj1-bpe12.5-tangentung

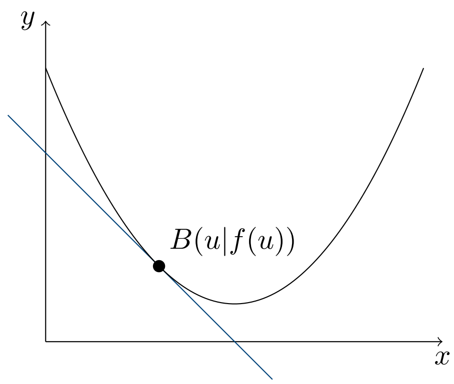
Exposition

Ein Angler angelt mit seiner Angel Tangenten an einem Fluss . Um eine Tangente zu fangen muss die Angelschnur tangential zur Wasseroberfläche verlaufen. Überlege, welche Tangente er angeln kann.



Komplikation

Wir bezeichnen eine Gerade t als *Tangente* in einem Berührpunkt $B(u|f(u))$ an das Schaubild von f, wenn gilt:



Peripetie

Beispiel 1

Berechne die Tangente an $f(x) = 0,25 \cdot (x-5)^2 + 1$ an der Stelle $x = 3$.

Berührpunkt B ist gegeben durch $B(3|f(3)) = B(3|2)$.
Die Ableitungsfunktion ist gegeben durch $f'(x) = 0,25 \cdot 2 \cdot (x-5) = 0,5 \cdot x - 2,5$. Einsetzen in die Tangentengleichung liefert:

$$\begin{aligned} t: y &= f'(u) \cdot (x-u) + f(u) \\ &= (0,5 \cdot 3 - 2,5) \cdot (x-3) + (0,25 \cdot (3-5)^2 + 1) \\ &= -1 \cdot (x-3) + 2 \\ &= -1 \cdot x - 1 \end{aligned}$$

Somit lautet die Gleichung der Tangente:

$$t: y = -1 \cdot x - 1$$

3 Fehler

Retardation

Aufgabe 1

Berechne jeweils die Tangente an den Berührpunkt $P(1|f(1))$. Skizziere jeweils den Sachverhalt für $0 \leq x \leq 2$.

$$a(x) = -x \cdot (x-3)^2; \qquad b(x) = \sin(x); \qquad c(x) = e^x$$

AFB I

Aufgabe 2

Erläutere, wieso für eine Tangente t, an den Berührpunkt $B(u|f(u))$ an das Schaubild von f, gilt:

$$t : y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

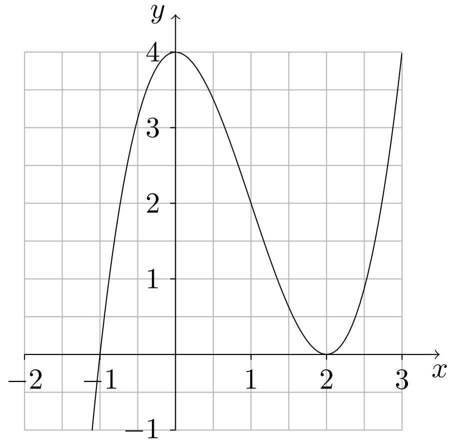
AFB III

Ermittle die zum Schaubild passende Funktionsgleichung einer Polynomfunktion. Untersuche zeichnerisch und rechnerisch, welche der angegebenen Geraden eine Tangente an das Schaubild sind.

$$t_1 = 0 \cdot x + 4$$

$$t_2 = -4 \cdot x + 6$$

$$t_3 = 8 \cdot x + 7$$



AFB III

Aufgabe 4

Untersuche die Aussage 'Die trigonometrischen Funktionen $a(x) = \sin(x)$ und $b(x) = \cos(x)$ haben keine gemeinsame Tangente.' auf ihren Wahrheitsgehalt.

AFB II

Aufgabe 5

Bestimme die Tangente von f im Punkt $P(0,5 \cdot \pi | f(0,5 \cdot \pi))$, wenn gilt:

$$f(x) = \sin(2 \cdot x) + 3$$

AFB II

Die Ableitungsfunktion f' von f lautet:

$$f'(x) = \cos(2 \cdot x) \cdot 2$$

Die Punktsteigungsform liefert die Tangentengleichung:

$$t : y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

Also gilt mit $u = 0,5 \cdot \pi$:

$$\begin{aligned} f'(u) \cdot (x - u) + f(u) &= (\cos(2 \cdot 0,5 \cdot \pi) \cdot 2) \cdot (x - 0,5 \cdot \pi) + \sin(2 \cdot 0,5 \cdot \pi) + 3 \\ &= (-1 \cdot 2) \cdot (x - 0,5 \cdot \pi) + 0 + 3 \\ &= -2 \cdot (x - 0,5 \cdot \pi) + 3 \\ &= -2 \cdot x + \pi + 3 \end{aligned}$$

Also lautet die Gleichung der Tangente:

$$t : y = -2 \cdot x + \pi + 3$$