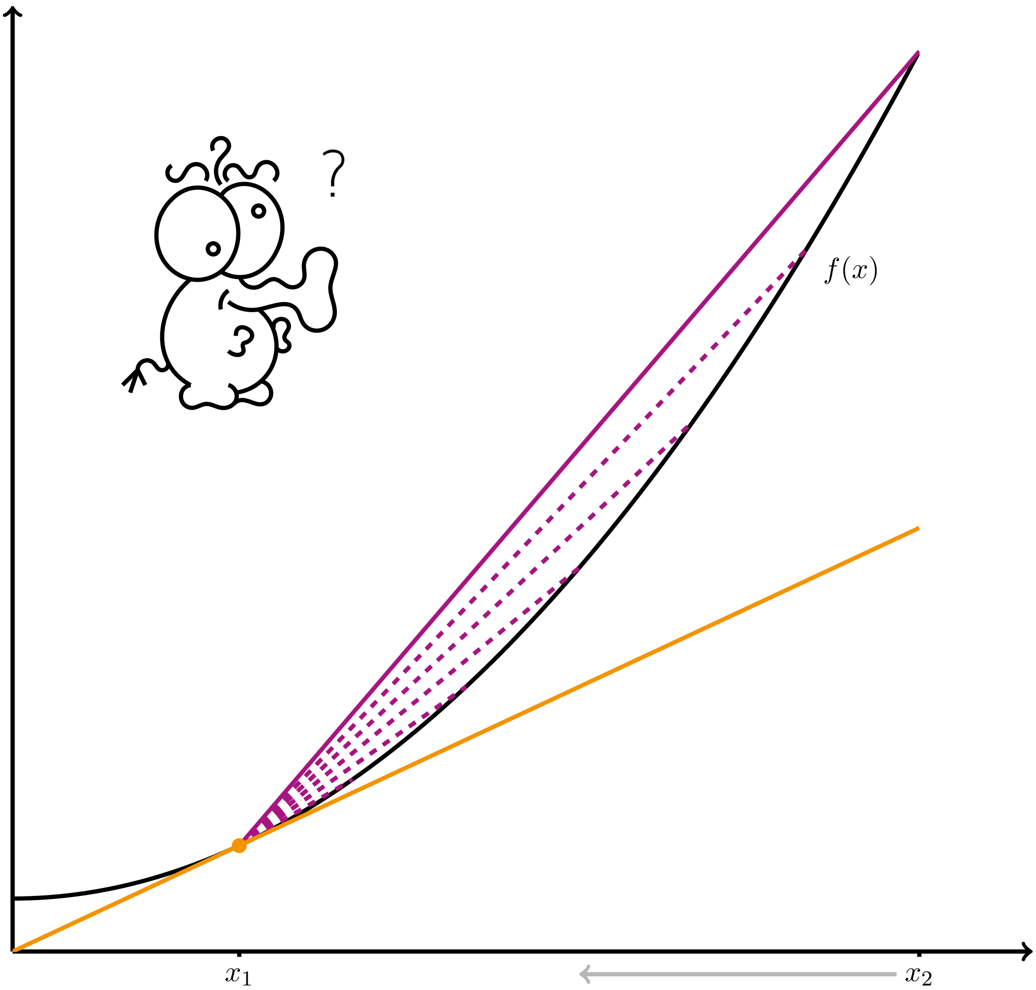
mathematikeanj1-bpe12.1bpe12.2bpe12.3-ableitungsregelung

Exposition

Ein Knobler knobelt über das Schaubild einer Funktion $f(x)$. Überlege wie durch Verschieben von x_2 in Richtung x_1 aus der mittleren Steigung (Differenzenquotient) die momentane Steigung (Differentialquotient) entsteht.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}; \qquad \lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



Komplikation

Wir definiert den *Differentialquotient* (die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0) druch:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$

Die *Ableitungsfunktion* einer Funktion f bildet alle x-Werte aus dem Definitionsbereich auf die Werte der Ableitungen von f ab. Mit Hilfe des Differentialquotienten ($a(x)$ und $b(x)$ sind differenzierbar, $b;\ c;\ m;\ r \in \mathrm{R}$ ermitteln wir die folgenden *Ableitungsregeln*:

- *Potenzregel*:

$$f(x) = x^r \qquad \rightsquigarrow f'(x) =$$

- *Summenregel*:

$$f(x) = a(x) + b(x) \qquad \rightsquigarrow f'(x) =$$

- *Faktorregel*:

$$f(x) = c \cdot a(x) \qquad \rightsquigarrow f'(x) =$$

- *Produktregel*:

$$f(x) = a(x) \cdot b(x) \qquad \rightsquigarrow f'(x) =$$

- *Kettenregel*:

$$f(x) = a(b(x)) \qquad \rightsquigarrow f'(x) =$$

- *Quotientenregel*:

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \qquad \rightsquigarrow f'(x) =$$

- *Besondere Funktionen*:

Peripetie

Beispiel 1

Berechne jeweils die Ableitungsfunktion.

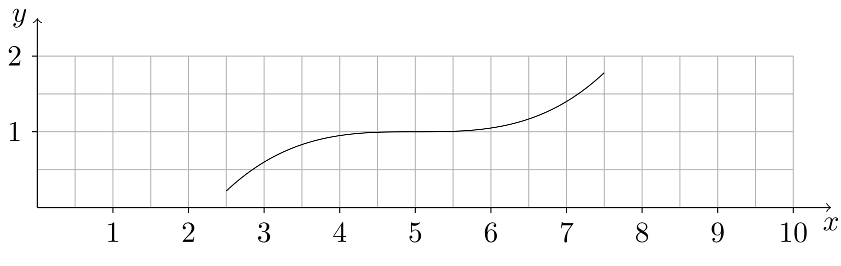
$$a(x) = x^3 \qquad d(x) = e^x \cdot x^2$$
$$b(x) = x^2 + x^5 \qquad e(x) = \sin(e^x)$$
$$c(x) = 4 \cdot \sin(x) \qquad f(x) = \tan(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)^{-1}$$

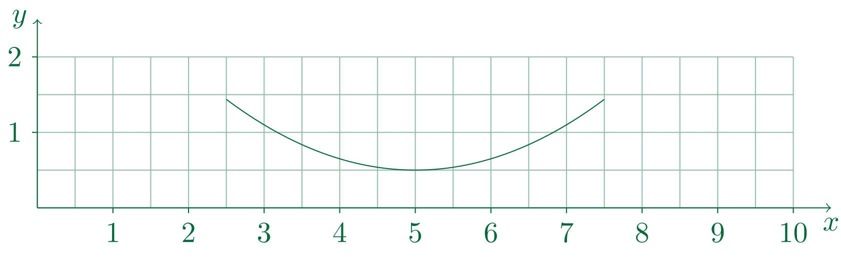
$$a'(x) = 3 \cdot x^3 \qquad d'(x) = e^x \cdot 2 \cdot x$$
$$b'(x) = 2 \cdot x + x^4 \qquad e'(x) = \cos(e^x)$$
$$c'(x) = \cos(x) \qquad f'(x) = \cos(x)^{-2}$$

5 Fehler

Beispiel 2

Gegeben ist das Schaubild K der Funktion f. Skizziere für $2{,}5 \leq x \leq 7{,}5$ das Schaubild der Ableitungsfunktion f'.



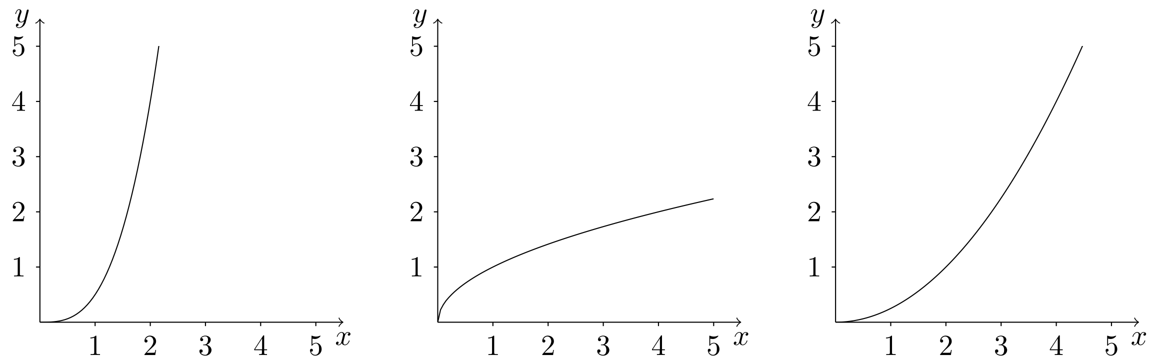


1 Fehler

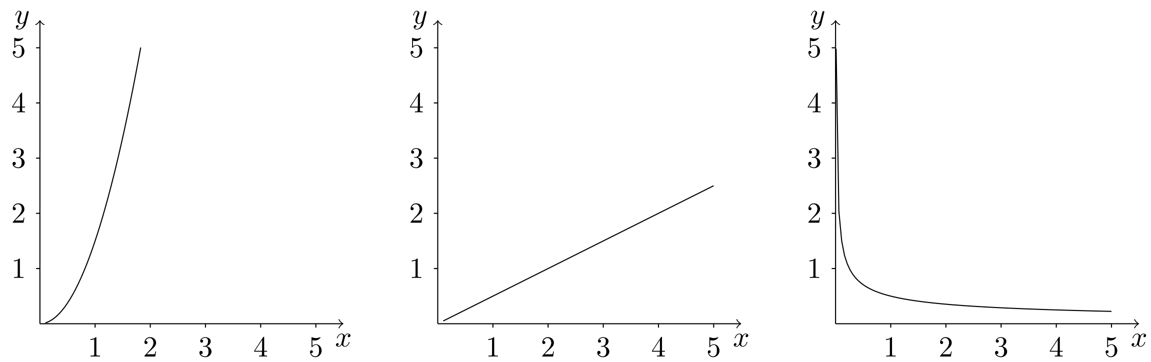
Beispiel 3

Gib jeweils an, welches Schaubild einer Funktionen zu welchem Schaubild einer Ableitungsfunktion gehört.

Schaubilder von Funktionen:



Schaubilder von Ableitungsfunktionen:



Jede Funktion gehört zur darunterliegenden Ableitungsfunktion.

1 Fehler

Beispiel 4

Berechne mit Hilfe des Differentialquotienten, die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 5$.

Es gilt:

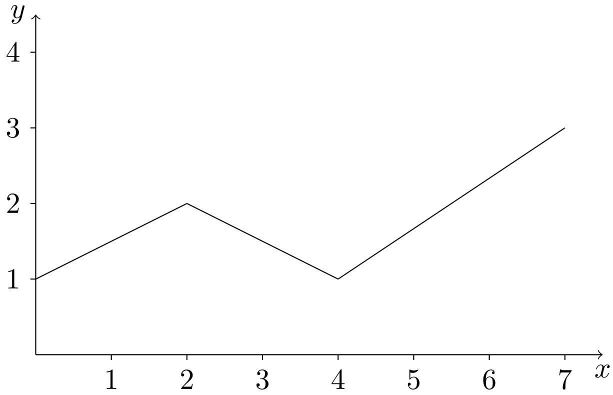
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 5^2}{x - 5} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x-5) \cdot (x+5)}{x - 5} = \lim_{x \to x_0} (x+5) = 10 \end{aligned}$$

0 Fehler

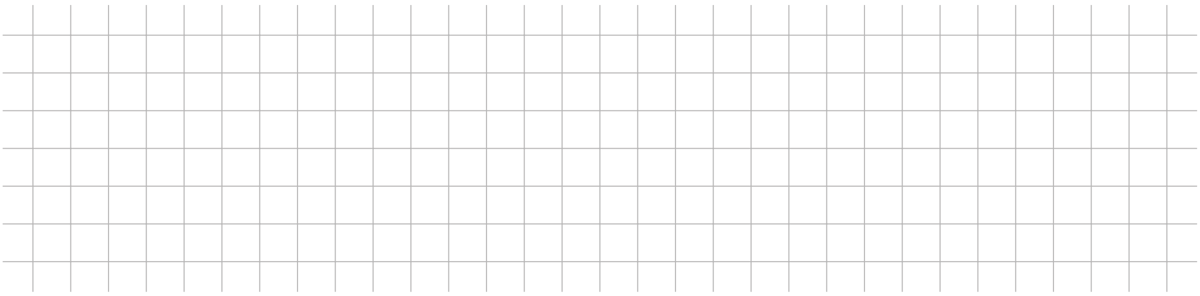
Retardation

Aufgabe 1

Gegeben ist das Schaubild K der Funktion f. Erläutere mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Funktion f nicht überall differenzierbar ist.



AFB III

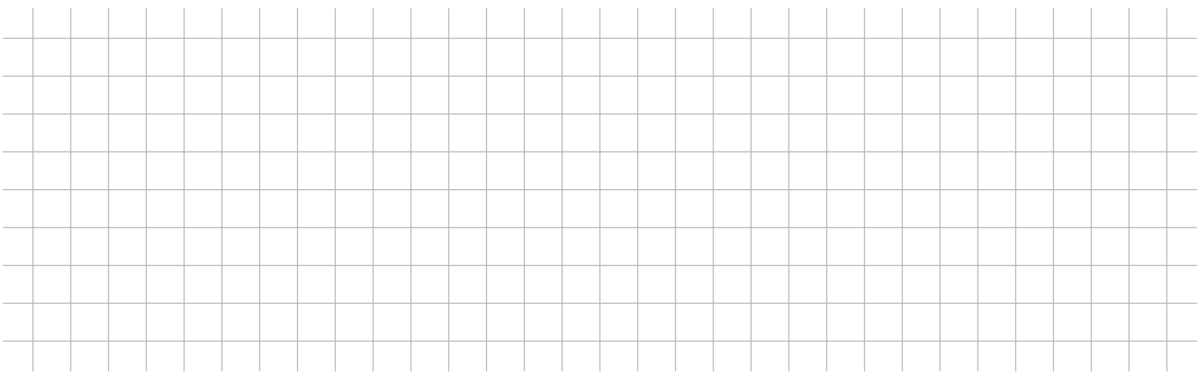


Aufgabe 2

Skizziere die Ableitungsfunktion von f mit $x \in [0;\ 0,5 \cdot \pi]$, wenn gilt:

$$f(x) = \sin(e^x)$$

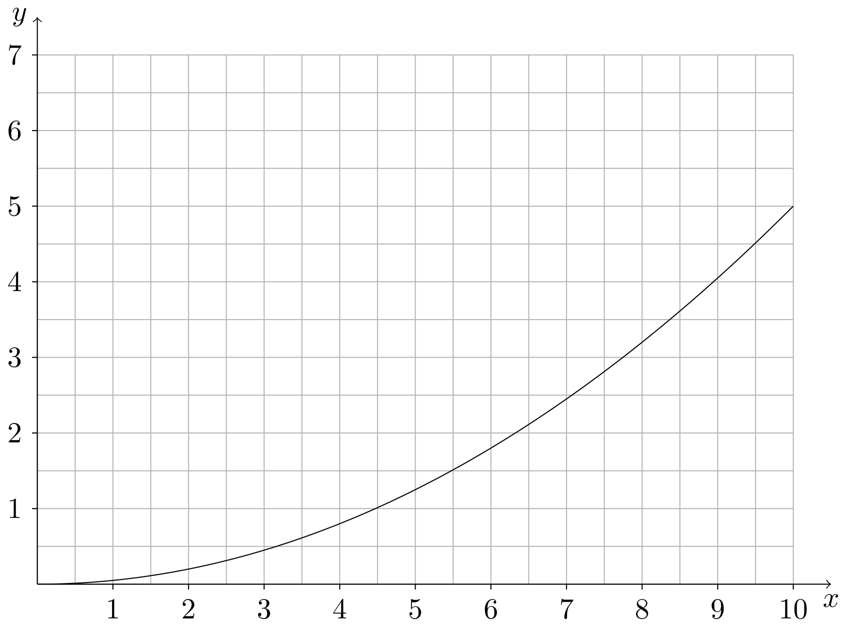
AFB I; TR

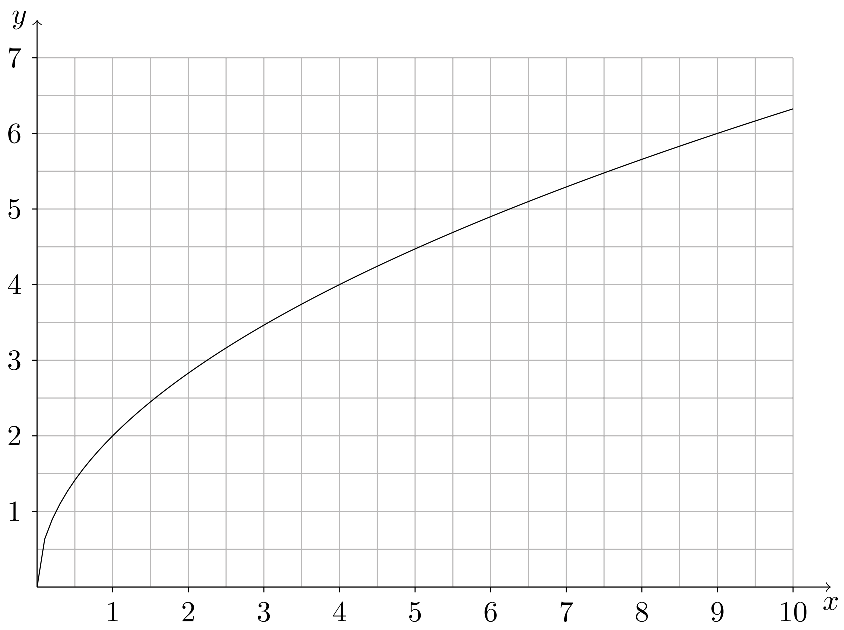


Gib jeweils eine zum Graphen passende Funktionsgleichung folgender Bauart an:

$$f(x) = a \cdot x^b; \qquad \text{mit } a;\ b \in \mathrm{R}$$

Skizziere jeweils die Ableitungsfunktion.





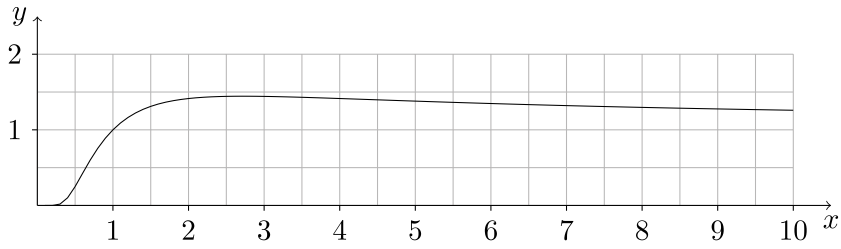
AFB I

Aufgabe 4

Gegeben ist das Schaubild K der Funktion f mit:

$$f(x) = \sqrt[x]{x}$$

Ermittle auf drei Nachkommastellen genau die Stelle x_0 mit $x_0 \in [0;\ 4]$, an der das Schaubild von f seinen höchsten Punkt hat. Ermittle zeichnerisch den Wert des Differentialquotienten von f an der Stelle x_0, wenn das Schaubild gegeben ist durch:



AFB II; TR

Aufgabe 5

Gib jeweils die Ableitungsfunktion an.

$a(x) = x^5$	$c(x) = 3 \cdot e^x$	$e(x) = (2 \cdot x + 1)^5$
$b(x) = x^3 + x^2$	$d(x) = x \cdot e^x$	$f(x) = \cos(x)$

AFB I

Aufgabe 6

Gib jeweils die Ableitungsfunktion an.

$a(x) = x^2 + 1$ $\quad$ $c(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $e(x) = \frac{2}{x^2}$

$b(x) = \sqrt{x} + x$ $\quad$ $d(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$

AFB II

Aufgabe 7

Gib jeweils die Ableitungsfunktion an.

$a(x) = x^3 \cdot x^4 \cdot x^{-7}$ $\quad$ $c(x) = \sin(x)^2 + \cos(x)^2$ $\quad$ $e(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[14]{x}$

$b(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ $\quad$ $d(x) = e^x \cdot \sin(0) + 42 \cdot x$ $\quad$ $f(x) = \ln(e^{3x}) - 2x$

AFB II

Aufgabe 8

Gib jeweils die Ableitungsfunktion an.

$a(x) = x \cdot \cos(x)$ $\quad c(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$ $\quad e(x) = 3 \cdot x^3 \cdot (-\cos(x))$

$b(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $\quad d(x) = e^x \cdot 2 \cdot x^4$ $\quad f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

AFB II

Aufgabe 9

Gib jeweils die Ableitungsfunktion an.

$a(x) = \sin(2 \cdot x)$ $\quad c(x) = e^{3 \cdot x}$ $\quad e(x) = \sqrt{5 \cdot x + 7}$

$b(x) = \cos(-2 \cdot x - 2)$ $\quad d(x) = (2x+2)^5$ $\quad f(x) = e^{x+x}$

AFB II

Aufgabe 10

Berechne jeweils die Ableitungsfunktion.

$a(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

$b(x) = 4 \cdot \sin(x)$

$c(x) = 2 \cdot e^x + 3$

$d(x) = \sin(\pi \cdot x) \cdot x$

$e(x) = e^{3 \cdot x} \cdot \sin(x)$

$f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x+1)^4$

AFB I; AFB II

Aufgabe 11

Berechne mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitungsfunktion von $f(x) = \sqrt{x}$.

AFB III

Katastrophe

Lösung 10

Ableitungsfunktionen:

$$a'(x) = 6 \cdot x + 2$$

$$b'(x) = 4 \cdot \cos(x)$$

$$c'(x) = 2 \cdot e^x$$

$$d'(x) = \cos(\pi \cdot x) \cdot \pi \cdot x + \sin(\pi \cdot x)$$

$$e'(x) = e^{3 \cdot x} \cdot 3 \cdot \sin(x) + e^{3 \cdot x} \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = 0,5 \cdot x^{-0,5} \cdot (2 \cdot x + 1)^4 + \sqrt{x} \cdot 8 \cdot (2 \cdot x + 1)^3$$

Lösung 11

Für $h = x - x_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$