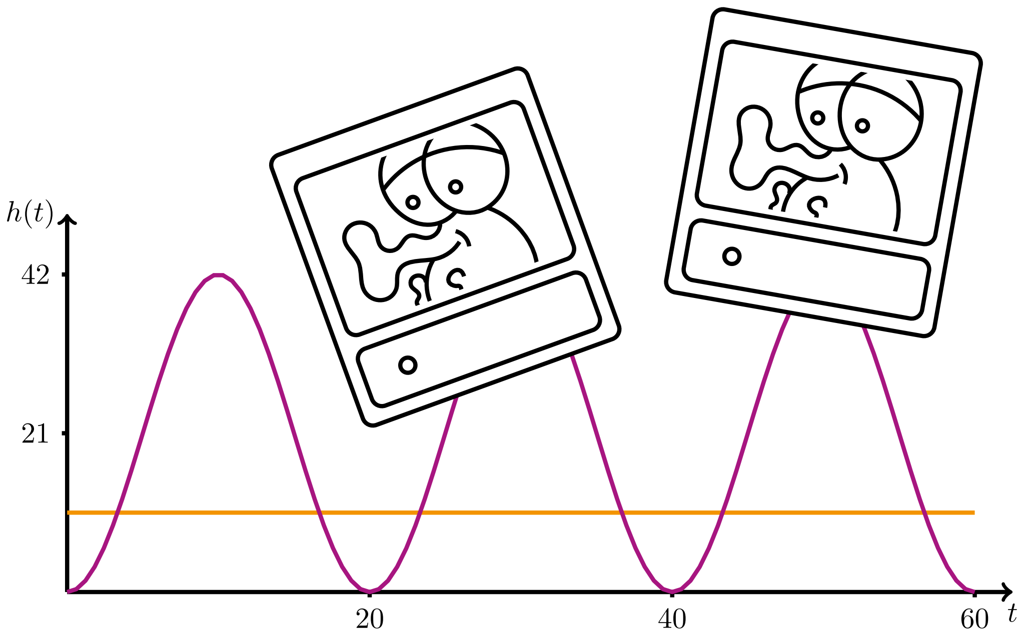
mathematikeanj1-bpe10.5bpe10.6-gleichung

Exposition

Ein Rummelplatzliebhaber fährt in seiner Gondel drei Runden mit dem Riesenrdad. Eine Runde dauert 20 Minuten. Überlege, zu welchen Zeitpunkten der Gondelfahrer auf einem Viertel der Höhe ist, wenn die Höhe $h(t)$ in Metern abhängig von der vergangenen Zeit t in Minuten beschrieben werdne kann durch:

$$h(t) = -21 \cdot \cos(0,1 \cdot \pi \cdot t) + 21$$



Komplikation

Wir lösen trigonometrische Gleichungen unter anderem mit Hilfe von:

- *Arkussinus / Arkuskosinus*:

- *Substitution*:

- *Numerisch*:

Peripetie

Beispiel 1

Berechne die Lösungen der Gleichung:

$$2 \cdot \sin(x) + 3 = 4$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin(x) + 3 &= 4 \\ 2 \cdot \sin(x) &= 1 \\ \sin(x) &= 0,5 \end{aligned}$$

Taschenrechner liefert $\sin(0,5) \approx 0,49$ also ist $x \approx 0,49$

1 Fehler

Beispiel 2

Berechne die Lösungen der Gleichung:

$$\sin(x)^2 - 2 \cdot \sin(x) = 0$$

Substitution von $\sin(x) = u$ liefert:

$$\begin{aligned} u^2 - 2 \cdot u &= 0 \\ u - 2 &= 0 \\ u &= 2 \end{aligned}$$

Rücksubstitution liefert: $\sin(x) = 2$ Die Gleichung hat keine Lösung.

1 Fehler

Beispiel 3

Ermittle eine Lösung der Gleichung:

$$\sin(\pi \cdot (x - 0,5)) = \cos(\pi \cdot x)$$

Taschenrechner liefert die Wertetabelle:

x	1	2	3	4	5	...
$\sin(\pi \cdot (x - 0,5))$	1	-1	1	-1	1	...
$\cos(\pi \cdot x)$	-1	1	-1	1	-1	...

Die Gleichung hat keine Lösung.

1 Fehler

Retardation

Aufgabe 1

Gib jeweils die Lösungsmenge der Gleichung an.

1. $\cos(x) = 1$
2. $\sin(x) = 0$
3. $\cos(x) = -1$
4. $2 \cdot \sin(x) + 1 = 3$
5. $\sin(x) + \sin(x) = 3$
6. $4 \cdot \cos(x) + 2 = 2$

AFB I; TR

Aufgabe 2

Gib jeweils näherungsweise eine Lösung der Gleichung an.

1. $e^x - 0,5 = \sin(x)$
2. $\sin(2 \cdot (x-1)) = \sin(x)$
3. $x \cdot \sin(x) = 42$
4. $\ln(x) = \cos(x)$
5. $\sin(\cos(x)) = 0,42$
6. $\sin(x) \cdot \cos(x) = 0,42$

AFB II

Aufgabe 3

Ermittle jeweils mit Hilfe einer geeigneten Skizze die Lösungen der Gleichung.

$$0 = 2 \cdot \sin(\pi \cdot x) + 1; \qquad = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2; \qquad 0 = \cos(2 \cdot x - \pi)$$

AFB II

Aufgabe 4

Ermittle jeweils die exakte Lösungsmenge der Gleichung.

1. $(\sin(x) - 2) \cdot (\sin(x) + 1) = 0$
2. $\sin(x)^4 - 2 \cdot \sin(x)^2 = 1$
3. $\sin(x)^4 - 2 \cdot \sin(x) = 0$
4. $\sin(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) + 1 = 0$
5. $2 \cdot \cos(x)^2 + \cos(x) - 3 = 0$
6. $\sin(x) = 0,42$

AFB II; AFB III

Aufgabe 5

Gib jeweils die Lösungsmenge der Gleichung an.

1. $\sin(x) + 1 = 0$
2. $0{,}5 - \cos(x) = 0$
3. $2 \cdot \sin(x) + 1 = 4$
4. $\sin(x)^2 - 1 = 0$
5. $\cos(x)^2 - \cos(x) = 0$
6. $\sin(x)^2 - 3 \cdot \sin(x) + 2 = 0$

AFB I; AFB II; TR

Aufgabe 6

Gib abhängig von $t \in \mathrm{R}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung an.

$$0 = t \cdot \sin(x) + 3$$

AFB III

Lösung 5

Sei $k \in \mathbb{Z}$.

1. Umformen liefert:
$$L = \{1,5 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot k\}$$
2. Für die Gleichung $\cos(x) = 0,5$ gibt es innerhalb einer Periode zwei Lösungen. Taschenrechner liefert $x_1 \approx 1,05$. Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse ist folglich $x_2 \approx -1,05$. Somit gilt:
$$L = \{\pm 1,05 + 2 \cdot \pi \cdot k\}$$
3. Umformen liefert:
$$L = \{\}$$
4. Substitution mit $u = \sin(x)$ lieft:
$$L = \{0,5 \cdot \pi + \pi \cdot k\}$$
5. Substitution mit $u = \cos(x)$ und Satz vom Nullprodukt liefert:
$$L = \{2 \cdot \pi \cdot k \text{ oder } 0,5 \cdot \pi + \pi \cdot k\}$$
6. Substitution mit $u = \sin(x)$ und Mitternachtsformel liefert:
$$L = \{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot k\}$$

Lösung 6

Für $|t| < 3$ gibt es keine Lösungen [Amplitute ist kleiner als die Verschiebung nach oben]. Für alle sonstigen $t \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Lösungen.