Exposition

Ei liebsch

Vektorielle Geometrie - Grundlagen

Der Elefant wusste nicht, wie er in das Ei gekommen war, aber er war sich ziemlich sicher, dass der Platz für den Rückweg nicht im Mietvertrag stand.

Die Schülerinnen und Schüler lernen Vektoren als geeignetes Hilfsmittel zur Beschreibung geometrischer Objekte in der Ebene und im Raum kennen. Sie erweitern ihr räumliches Vorstellungsvermögen und machen sich mit der vektoriellen Schreibweise vertraut. Sie nutzen die Vektorrechnung als effektives Werkzeug zur analytischen Behandlung geometrischer Fragestellungen und stellen fachübergreifende Verbindungen her.

Autor liebsch

QR liebsch

Logo liebsch

Komplikation

Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise.

Legung liebsch

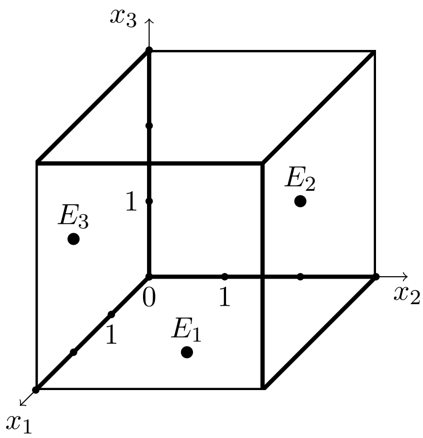
Ein Elefant legt mehrere Eier in einen würfelförmigen Elefantenstall. Die Eier werden mit a; b; $c \in \mathrm{R}$ modelliert durch die Punkte

$$E_1(2|1,5|0); \qquad E_2(-2|1|0); \qquad E_3(a|b|c)$$

Der Stall wird unter anderem modelliert durch die Punkte:

$$S_1(0|0|0); \qquad S_2(3|0|0); \qquad S_7(3|3|3)$$

Die meisten Leute glauben, dass Elefanten keine Eier legen, aber das liegt nur daran, dass noch niemand den Mut hatte, ihnen ein ordentliches Frühstück zu servieren und höflich zu fragen



1. Iss ein Ei.

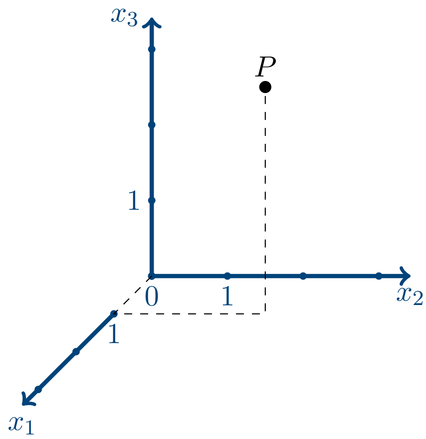
2. Gib die fehlenden Eckpunkte und das Volumen des Elefantenstalls an.

3. Untersuche den Wahrheitsgehalt der Aussage: 'Alle Eier befinden sich im Elefantenstall'.

Peripetie

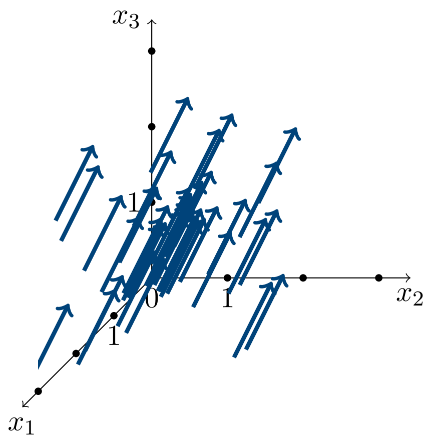
1. Wir definieren für $a;b;c \in \mathrm{R}$ einen Punkt P in einem **dreidimensionalen Koordinatensystem**:

$$P(a|b|c)$$



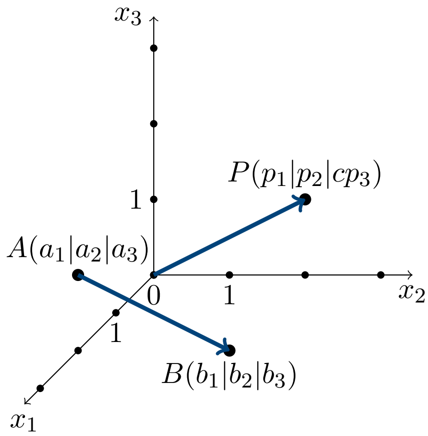
Wir definieren für $a;b;c \in \mathrm{R}$ einen **Vektor** $\vec{v}$ als ein durch Länge und Richtung definiertes geometrisches Objekt. Wir können einen Vektor durch eine Pfeilklasse in einem dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



Ein **Verbindungsvektor** $\vec{AB}$ zeigt vom Punkt A zum Punkt B. Ein **Gegenvektor** eines Vektors $\vec{v}$ zeigt in die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{v}$. Ein **Ortsvektor** $\vec{OP}$ eines Punktes P zeigt vom Ursprung zum Punkt und hat eine feste Position am Ursprung. Ein **Nullvektor** hat ausschließlich 0-Koordinaten.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix};\ \vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

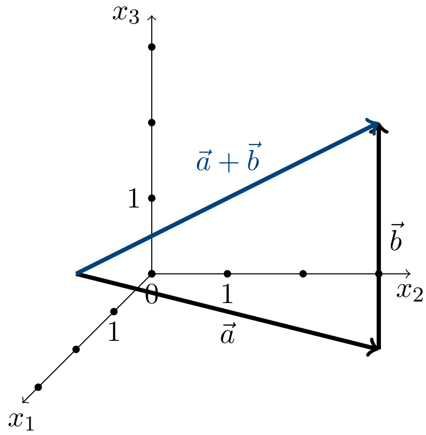


Nullvektor und Ortsvektor sind keine Vektoren im eigentlichen Sinne, da sie nicht ausschließlich durch Länge und Richtung definiert sind.

2. Wir definieren verschiedene Rechenoperationen von Vektoren.

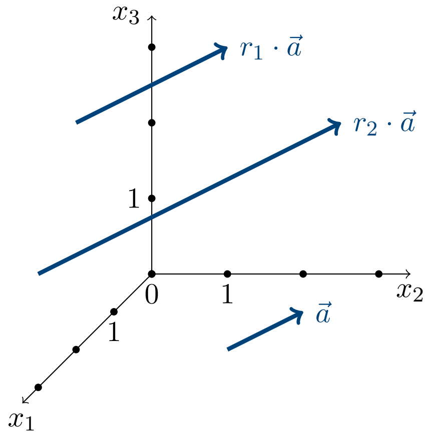
Vektoraddition:

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit einem Skalar:

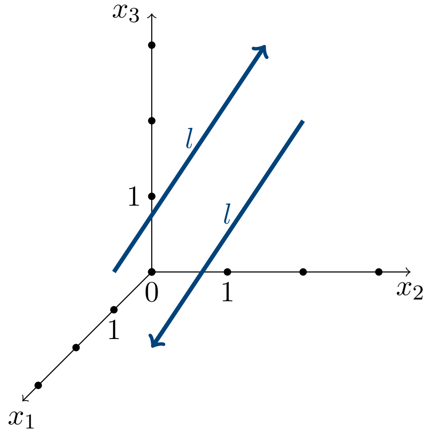
$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



Sind zwei Vektoren Vielfache voneinander, so sind sie parallel.
Wir sprechen auch von Kolinearität.

Wir definieren den Betrag eines Vektors $\vec{v}$ als seine Länge l:

$$l = |\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

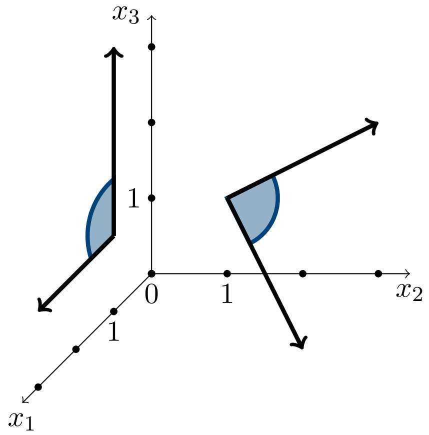


3. Wir definieren als Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Wir nutzen das Skalarprodukt, um zwei Vektoren auf Orthogonalität zu überprüfen. Zwei Vektoren sind dann und nur dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt:

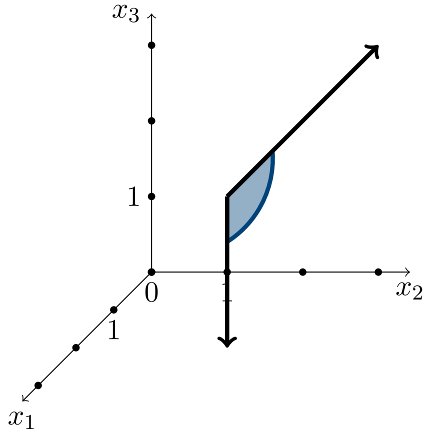
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



Wir berechnen den Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch:

Da wir einen Winkel berechnen, muss der Taschenrechner auf DEG eingestellt sein.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$



Retardation

1. Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$; $B(0|0|7)$ und $C(-1|-2|0,5)$.

1.1. Skizziere das Dreieck ABC in ein geeignetes dreidimensionales Koordinatensystem.

1.2. Skizziere den Ortsvektor von C und den Verbindungsvektor von A nach B in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Gib die beiden Vektoren an.

1.3. Gib die Punkte an die entstehen, wenn A senkrecht auf die Koordinatenebenen projiziert wird. Gib die Punkte an die entstehen, wenn A an den Koordinatenebenen gespiegelt wird.

2. Gegeben sind die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(3|3|3)$ sowie die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2.1. Berechne $2 \cdot \vec{v} - 4 \cdot \vec{w}$.

2.2. Gib den Mittelpunkt M der Strecke PQ an. Ermittle M', sodass M' die Strecke PQ im Verhältnis $2:3$ teilt.

2.3. Ermittle einen Vektor, der in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$ zeigt, aber die Länge 1 hat.

3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u}$; $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit:

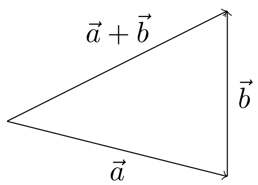
Taschenrechner

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 42 \end{pmatrix}; \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3.1. Ermittle welche der Vektoren rechtwinklig sind.

3.2. Ermittle paarweise alle Winkel zwischen den Vektoren.

3.3. Zeige ohne die Winkelformel das gilt: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind dann und nur dann senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.



Katastrophe

Ein Huhn zersägt einen würfelförmigen Elefantenstall.

Es war einer dieser seltenen Vormittage, an denen man beim Frühstückskaffee genüsslich zuschaut, wie ein Huhn mit einer Motorsäge den Elefantenstall zersägt – und sich fragt, ob man vielleicht den Tee heute doch ein bisschen zu stark aufgebrüht hat.

Säge liebsch

Der Stall wird unter anderem modelliert durch die Punkte:

$$S_1(0|0|0); \qquad S_2(5|0|0); \qquad S_7(5|5|5)$$

Die Ebene, in der die Säge durch den Stall läuft wird modelliert durch das Dreieck:

$$A(6|0|0); \qquad B(0|7|0); \qquad C(0|0|5)$$

1. Skizziere den Stall und das Dreieck in ein geeignetes dreidimensionales Koordinatensystem.

2. Ermittle zeichnerisch das n-Eck, das die Schnittfläche darstellt.

3. Gib $x \in \mathbb{N}$ an, wenn n die Anzahl der Ecken der Schnittfläche ist und es gilt:

$$x = n \cdot 8,5$$