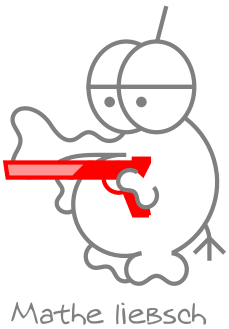
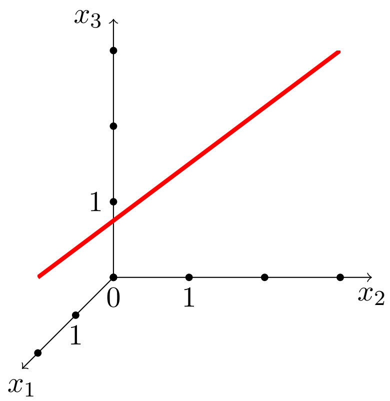
Die Schülerinnen und Schüler erweitern ihr Wissen zur Darstellung von Geraden durch die vektorielle Beschreibung mithilfe einer Parametergleichung. Sie erkennen die Tragfähigkeit dieser Darstellung insbesondere auch im dreidimensionalen Raum und übertragen diese auf die Beschreibung von Ebenen. Bei der Darstellung von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Koordinatensystem sowie der Untersuchung von deren Lagebeziehungen wird das räumliche Vorstellungsvermögen weiter geschult. Damit können die Schülerinnen und Schüler lineare Gleichungssysteme geometrisch interpretieren und ihre Lösung deuten. Schließlich führen sie Flächen-und Volumenberechnungen an Objekten im Raum durch und modellieren reale Situationen mithilfe geometrischer Objekte.

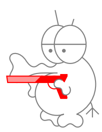


0 Motivation

Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise. Ein Elefant schießt mit seiner Lasertec-Pistole einen Laserstrahl . Die Mündung der Pistole befindet sich in $M(2|0|1)$. Der Laserstrahl bewegt sich in Richtung $\vec{v}$. Berechne, ob der Elefant das Ziel in $Z(-12|21|15)$ trifft, wenn gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

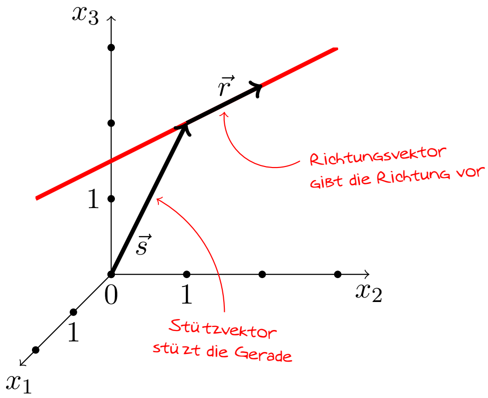


1 Sicherung Geradendarstellung

Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

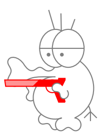



mithilfe von Parametergleichungen und untersuchen deren besondere Lage im Koordinatensystem. Außerdem beurteilen sie, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Sie berechnen Spurpunkte und zeichnen Geraden im Koordinatensystem. Darüber hinaus werden Schnittwinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

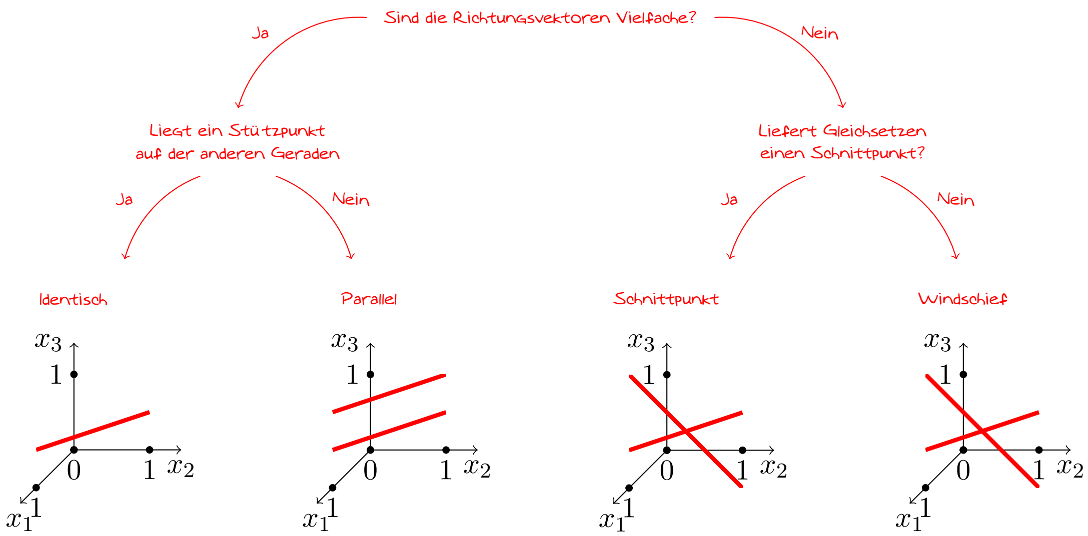
Den Winkel berechnet man aus den Richtungsvektoren und beispielsweise einem Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht!

zwischen Gerade und Koordinatenebenen berechnet.



2 Sicherung Geradenbeziehung

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die gegenseitige Lage von Geraden

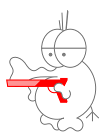



und berechnen Koordinaten von Schnittpunkten und Schnittwinkel. $\alpha$ durch:

Den Winkel berechnet man aus den Richtungsvektoren!

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{u}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{u}|}$$

Sie geben Gleichungen von Geraden an, die gegebene Lagebeziehungen erfüllen.



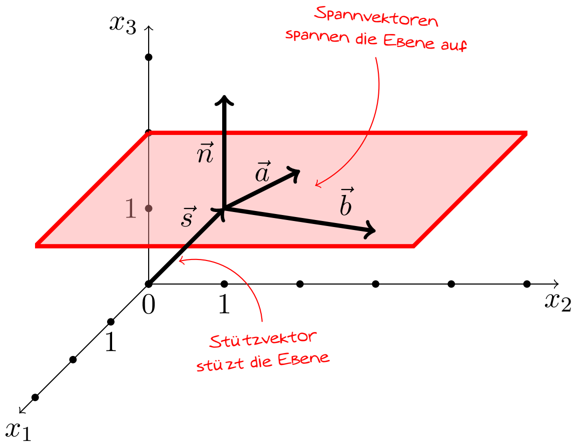
3 Sicherung Ebenendarstellung

Die Schülerinnen und Schüler ermitteln einen Normalenvektor

eAN!

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

und deuten diesen geometrisch als einen Vektor, der zu zwei Spannvektoren einer Ebene orthogonal ist. Sie nutzen zur Beschreibung einer Ebene



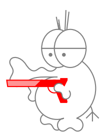

verschiedene Darstellungsformen

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

eAN!

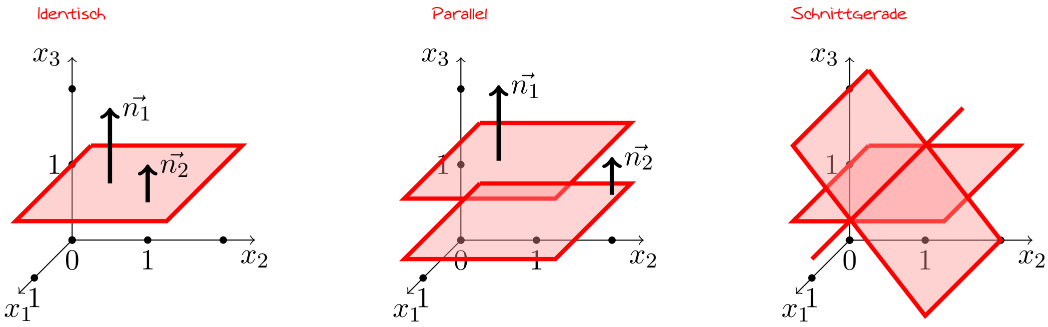
$$E : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

und ermitteln Ebenengleichungen aus Punkten und Geraden.

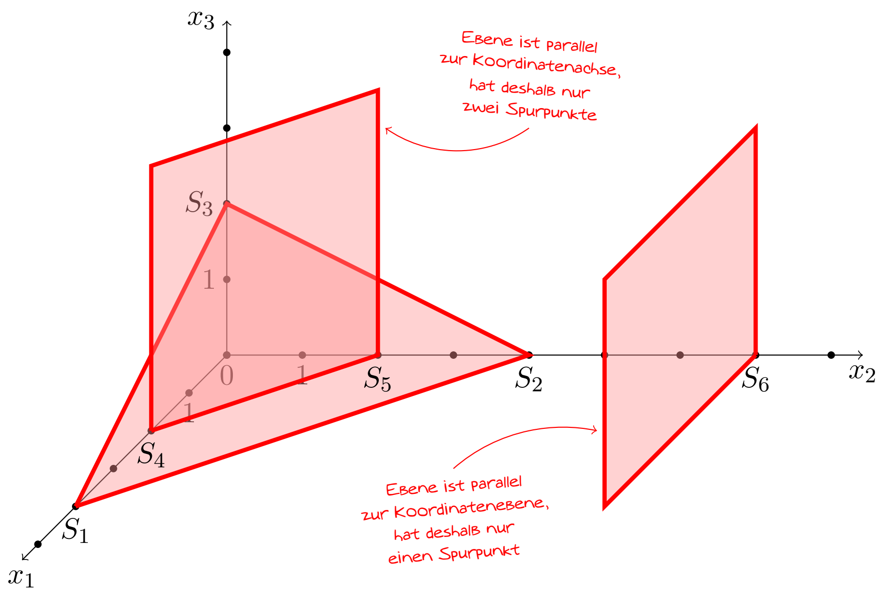


eAN!

4 Sicherung Ebenenbeziehung
Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die besondere Lage von Ebenen




im Koordinatensystem. Sie beurteilen, ob ein Punkt auf einer Ebene liegt. Die Schülerinnen und Schüler ermitteln Koordinaten von Spurpunkten sowie Gleichungen von Spurgeraden und zeichnen Ebenen

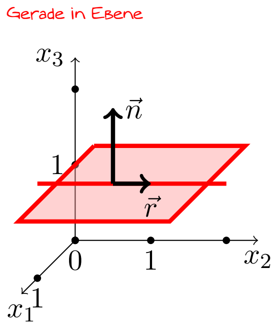


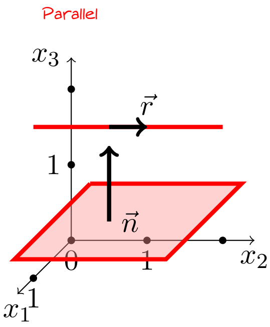

im Koordinatensystem.

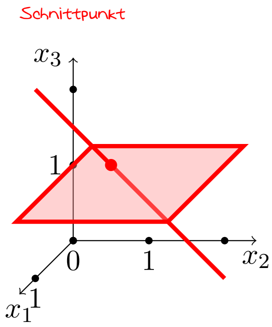
5 Sicherung Geradenebenenbeziehung

eAN!

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden.




Sie bestimmen die Koordinaten des Schnittpunktes von Gerade und Ebene und eine Gleichung der Schnittgerade zwischen zwei Ebenen.

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$$
$$e \cdot x_1 + f \cdot x_2 + g \cdot x_3 = h$$

$$x_3 = t$$

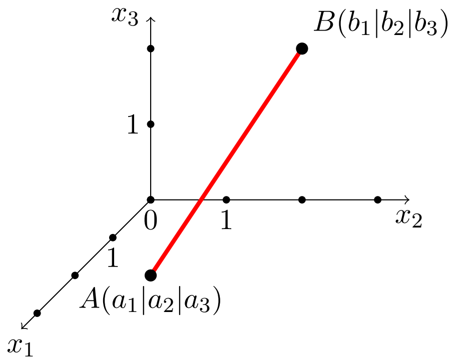
$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = d - c \cdot t$$
$$e \cdot x_1 + f \cdot x_2 = h - g \cdot t$$

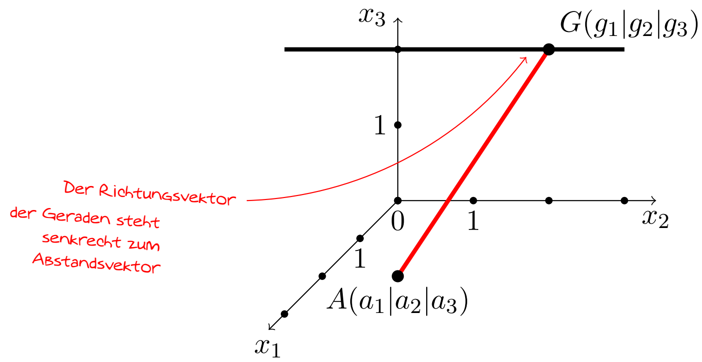
$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

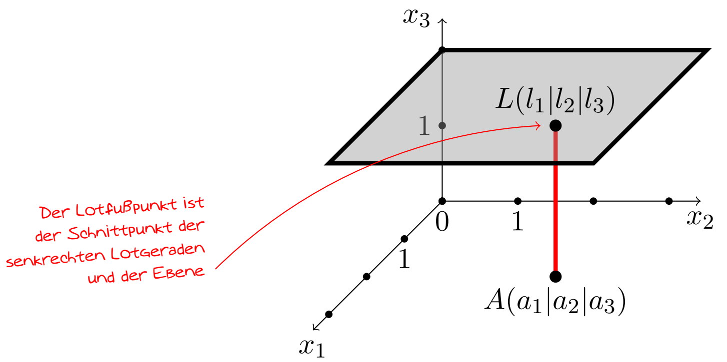
Die Schülerinnen und Schüler geben Geraden und Ebenen an, die gegebene Lagebeziehungen erfüllen.

6 Sicherung Abstandsberechnung
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Abstände

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$




und berechnen Volumen von elementaren geometrischen Objekten im Raum.

7 Sicherung Anwendung
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Lösung geometrischer Problemstellungen im Sachzusammenhang und interpretieren die Ergebnisse im Kontext der Anwendung.

8 Übung Geradendarstellung

Gegeben ist die Gerade $g$ mit:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.0 Zeichne die Gerade in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

8.1 Untersuche, ob die Punkte $P(1|2|3)$ und $Q(a|10 \cdot a|8)$ für ein $a \in \mathrm{R}$ auf $g$ liegen.

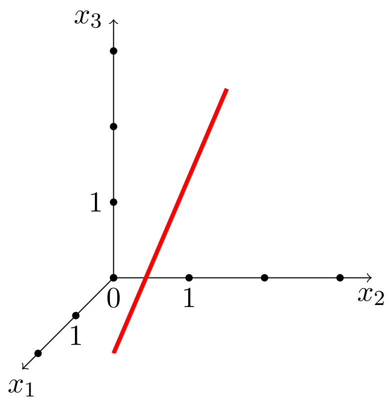
8.2 Ermittle den Schnittwinkel von $g$ mit der $x_1x_2$-Ebene mit Hilfe der besonderen Lage von $g$. Taschenrechner

9 Übung Geradenbeziehung

Gegeben sind die Geraden $g$ und $h$ mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.0 Gib an, welche Gerade dargestellt ist. Skizziere dazu eine parallele Gerade und gib ihre Geradengleichung an.




9.1 Ermittle die Lage von $g$ zu $h$ und berechne gegebenenfalls Schnittwinkel und Schnittpunkt. Taschenrechner

9.2 Ermittle eine Gerade, die windschief zu $g$ steht und $h$ schneidet.

10 Übung Ebenendarstellung

Gegeben sind die drei Punkte $A(3|0|1)$; $B(0|4|2)$ und $C(3|0|7)$, die auf der Ebene $E$ liegen. Außerdem ist die Gerade $g$ gegeben mit:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

10.0 Gib eine Parameterform von $E$ an.

10.1 Berechne die Normalenform von $E$.

10.2 Gib die Normalenform von $F$ an, wenn $F$ vom Punkt $A$ und der Geraden $g$ aufgespannt wird.

11 Übung Ebenenbeziehung
Gegeben sind die Ebenen $E$ und $F$ mit:

$$E: 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 12$$

$$F: x_1 + x_2 = 3$$

11.0 Gib alle Spurpunkte von $E$ und $F$ an.

11.1 Zeichne die Ebenen in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

11.2 Ermittle zeichnerisch die Schnittgerade von $E$ und $F$.

12 Übung Geradenebenenbeziehung

Gegeben sind die Ebenen $E$ und $F$, sowie die Gerade $g$ mit:

$$E : 2 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 = 6$$

$$F : 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 3$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.0 Gib die Lage von $g$ und $F$ an.

12.1 Berechne den Schnittpunkt von $g$ und $E$.

12.2 Ermittle die Schnittgerade von $E$ und $F$.

13 Übung Abstandsberechnung

Gegeben ist der Punkt $A(3|3|3)$, sowie die Gerade $g$ und die Ebene $E$ mit:

$$E : 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 3$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

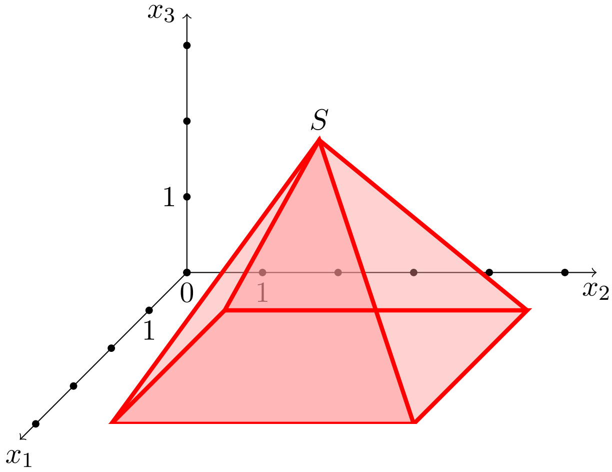
13.0 Berechne den Abstand von $A$ zum Stützpunkt von $g$.

13.1 Berechne den Abstand von $A$ zu $g$.

13.2 Ermittle den Abstand von $A$ zu $E$ und Ermittle den Punkt $A'$, der bei der Spiegelung von $A$ an der Ebene $E$ entsteht.

14 Übung Anwendung

Eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche in der $x_1x_2$-Ebene hat die Höhe $3$.




14.0 Gib mit Hilfe der Skizze die Koordinaten aller Eckpunkte an, wenn die Spitze $S$ mittig über der Grundfläche liegt.

14.1 Berechne das Volumen und die Mantelfäche der Pyramide. Berechne den Schattenpunkt $S_b$ den eine Lichtquelle von $L(3|0|5)$ geradlinig von $S$ auf die $x_1x_2$-Ebene wirft. Taschenrechner

14.2 Erläutere, wie man näherungsweise eine Ebene $E$ ermitteln kann, die parallel zur $x_1x_2$-Ebene liegt, sodass die Ebene die Pyramide in zwei gleich große Teile teilt.

## 15 Testung

15.0 Untersuche die Lage von $g$ und $h$ und ermittle gegebenenfalls Schnittpunkt und Schnittwinkel, wenn gilt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 35 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40,6736 \\ 42 \\ 41 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1,3264 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$