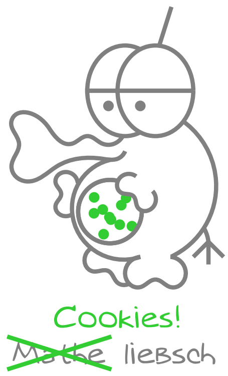
BG 11| BPE 7 Vektorgrundlegung

Die Schülerinnen und Schüler lernen Vektoren als geeignetes Hilfsmittel zur Beschreibung geometrischer Objekte in der Ebene und im Raum kennen. Sie erweitern ihr räumliches Vorstellungsvermögen und machen sich mit der vektoriellen Schreibweise vertraut. Sie nutzen die Vektorrechnung als effektives Werkzeug zur analytischen Behandlung geometrischer Fragestellungen und stellen fachübergreifende Verbindungen her.



55202665642316

Exposition

Komplikation
Motivation Vektorgrundlegung

Peripetie
Sicherung Vektorung
Sicherung Vektorrechnung
Sicherung Skalarproduktung

Retardation
Übung Vektorung
Übung Vektorrechnung
Übung Skalarproduktung

Katastrophe
Testung

0 Motivation Vektorgrundlegung

Taschenrechner!

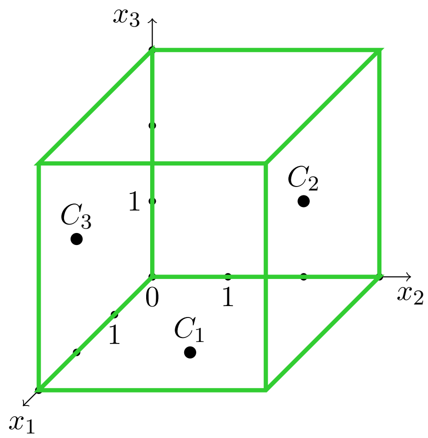
Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise. Drei Cookies schweben in einem würfelförmigen Klassenzimmer. Die Cookies werden für $a; b; c \in \mathbb{R}$ modelliert durch die Punkte

$$C_1(2|1,5|0); C_2(-2|1|0); C_3(a|b|c)$$

Das Klassenzimmer wird unter anderem modelliert durch die Punkte:

$$K_1(0|0|0); K_2(3|0|0); K_7(3|3|3)$$

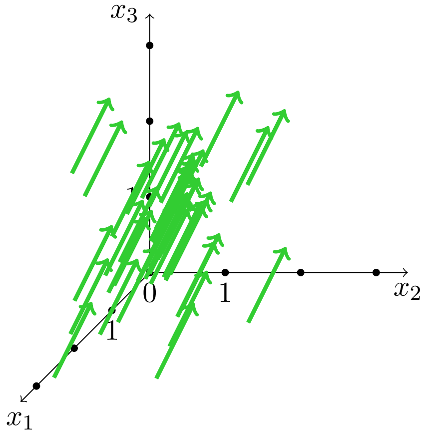
Untersuche den Wahrheitsgehalt der Aussage: 'Alle Cookies befinden sich im Klassenzimmer'.



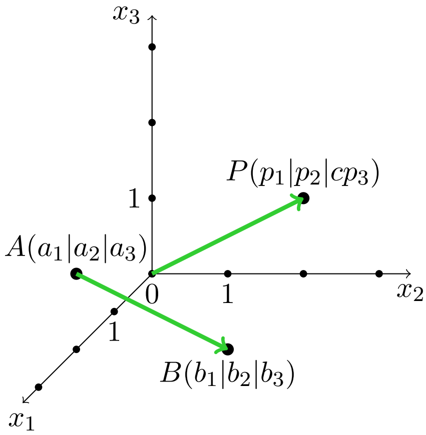
1 Sicherung Vektorung

Die Schülerinnen und Schüler deuten Vektoren als Pfeilklassen und interpretieren sie geometrisch als Verschiebung.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

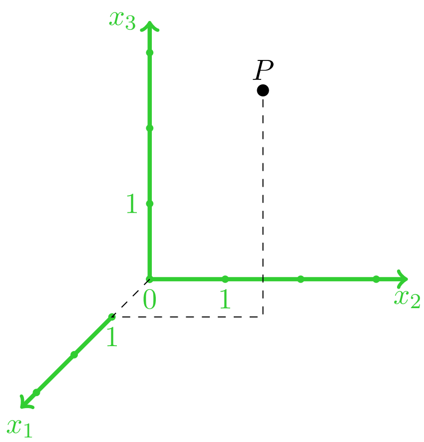


$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



Sie zeichnen geometrische Objekte im dreidimensionalen Koordinatensystem und nutzen das Koordinatensystem, um geometrische Sachverhalte zu beschreiben.

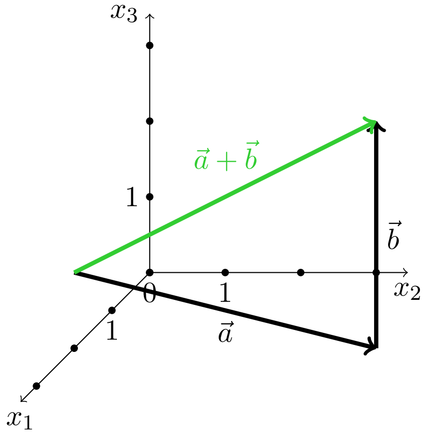
$$P(a|b|c)$$



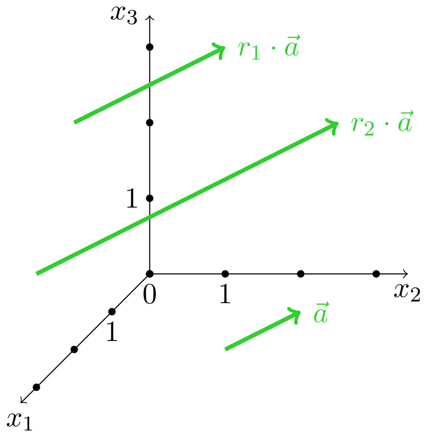
2 Sicherung Vektorrechnung

Die Schülerinnen und Schüler verwenden elementare Rechenoperationen für Vektoren und deuten sie geometrisch.

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$



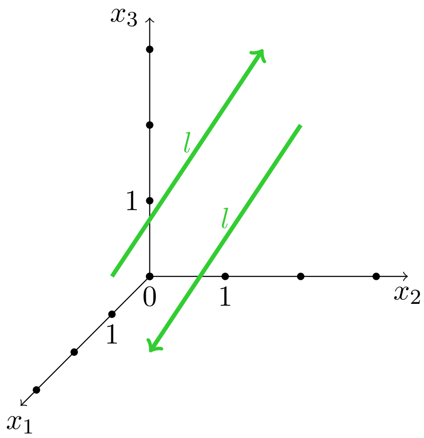
$$r\cdot\vec{a}=r\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cdot a_1\\r\cdot a_2\\r\cdot a_3\end{pmatrix}$$



Vielfache Vektoren bezeichnet man als parallel oder kolinear.

Sie berechnen den Betrag eines Vektors und interpretieren ihn als Länge und verwenden Vektoren zur Bestimmung von Teilpunkten einer Strecke.

$$l=|\vec{v}|=\left|\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

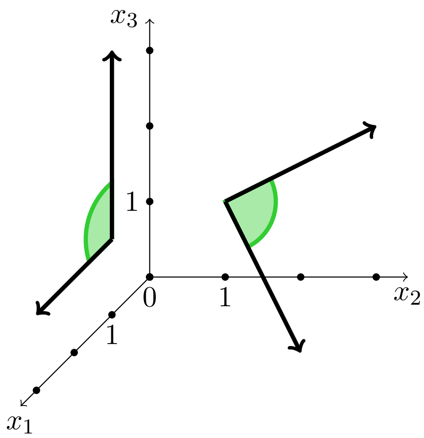


3 Sicherung Skalarproduktung

Die Schülerinnen und Schüler erläutern die Bedeutung des Skalarprodukts in der Geometrie.

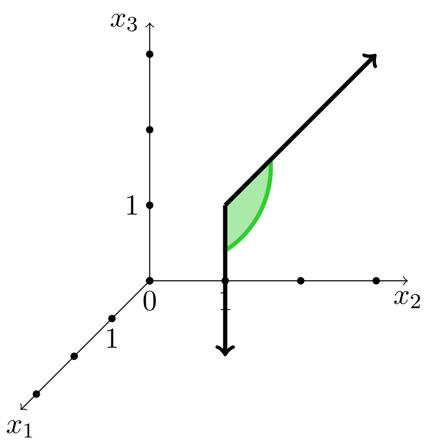
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

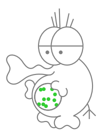
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



Damit bestimmen sie Winkel zwischen zwei Vektoren und untersuchen geometrische Objekte in Ebene und Raum.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$





4 Übung Vektorung

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$; $B(0|0|7)$ und $C(-1|-2|0,5)$.

4.0 Skizziere das Dreieck ABC in ein geeignetes dreidimensionales Koordinatensystem.

4.1 Skizziere den Ortsvektor von C und den Verbindungsvektor von A nach B in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Gib die beiden Vektoren an.

4.2 Gib die Punkte an die entstehen, wenn A senkrecht auf die Koordinatenebenen projiziert wird. Gib die Punkte an die entstehen, wenn A an den Koordinatenebenen gespiegelt wird.

5 Übung Vektorrechnung
Gegeben sind die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(3|3|3)$ sowie die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5.0 Berechne $2 \cdot \vec{v} - 4 \cdot \vec{w}$.

5.1 Gib den Mittelpunkt M der Strecke PQ an. Ermittle M', sodass M' die Strecke PQ im Verhältnis $2:3$ teilt.

5.2 Ermittle einen Vektor, der in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$ zeigt, aber die Länge 1 hat.

6 Übung Skalarproduktung

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u}$; $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit:

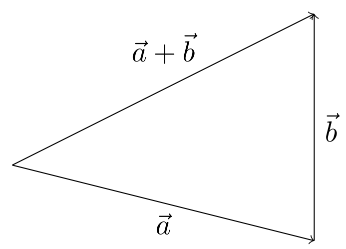
Taschenrechner!

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 42 \end{pmatrix}; \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

6.0 Ermittle alle rechten Winkel.

6.1 Ermittle paarweise alle Winkel zwischen den Vektoren.

6.2 Zeige ohne die Winkelformel das gilt: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind dann und nur dann senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.



42 Testung

Ein Würfel wird unter anderem modelliert durch die Punkte:

$$S_1(0|0|0); S_2(5|0|0); S_7(5|5|5)$$

Das Dreieck D wird modelliert durch die Punkte:

$$A(6|0|0); B(0|7|0); C(0|0|5)$$

Ermittle $x \in \mathrm{N}$ an, wenn n die Anzahl der Ecken der Schnittfläche ist und es gilt:

$$x = n \cdot 8,4$$