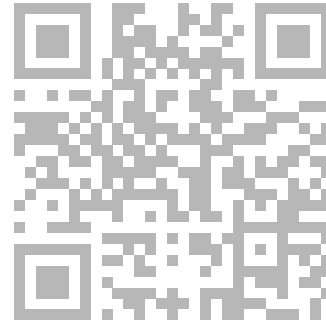


BPE 17 In der Stochastik werden Inhalte der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Elementen der beurteilenden Statistik verzahnt. Basierend auf dem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff differenzieren die Schülerinnen und Schüler ihr Verständnis von Wahrscheinlichkeit weiter aus, indem sie unterschiedliche Zugänge zum Begriff Wahrscheinlichkeit kennenlernen. In Zufallsexperimenten und Simulationen erleben die Schülerinnen und Schüler das Wesen des Zufalls. Sie erkennen, dass Zufall mit Mitteln der Mathematik quantifizierbar ist. Die Schülerinnen und Schüler werden für die Beurteilung von zufälligen Ereignissen sensibilisiert, um zufällige Alltagssituationen und statistische Aussagen kritisch hinterfragen und bewerten zu können.



Stochastung

Exposition

Komplikation

Motivierung

Peripetie

Sicherung Verteilung

Sicherung Experimentierung

Sicherung Baumung

Sicherung Kombinierung

Sicherung Erwartung

Sicherung Bernoullung

Sicherung Binomialverteilung

Sicherung Standardabweichung

Sicherung Normalverteilung

Sicherung Sigmaregelung

Sicherung Intervallung

Retardation

Übung Verteilung

Übung Experimentierung

Übung Baumung

Übung Kombinierung

Übung Erwartung

Übung Bernoullung

Übung Binomialverteilung

Übung Standardabweichung

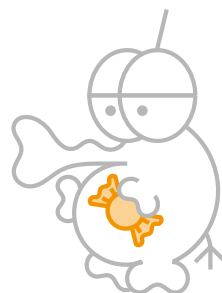
Übung Normalverteilung

Übung Sigmaregelung

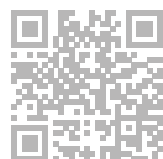
Übung Intervallung

Katastrophe

Testung



Bonbon
~~Mutter~~ liebsch



1 Sicherung Verteilung

Die Schülerinnen und Schüler führen Zufallsexperimente und deren Simulationen durch und deuten dabei auftretende relative Häufigkeiten als Näherung von **Wahrscheinlichkeiten**. Reale Situationen beschreiben sie als Zufallsexperimente und beurteilen, ob ein Zufallsexperiment ein **Laplace-Experiment** ist.

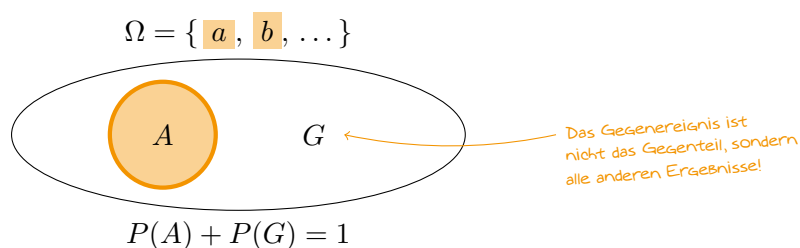
$$0 \leq P \leq 1 \quad P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_n)$$

Sie nutzen Wahrscheinlichkeiten zur Vorhersage von erwarteten absoluten oder relativen Häufigkeiten und stellen Häufigkeits- und **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** tabellarisch dar.

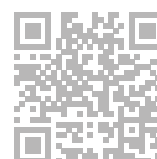
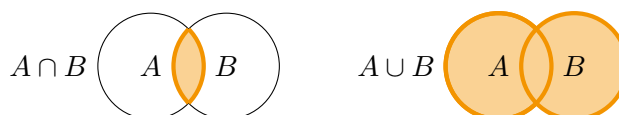
x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\dots$	$P(X = x_n)$

2 Sicherung Experimentierung

Die Schülerinnen und Schüler erläutern die Begriffe **Ergebnis** und **Ereignis**

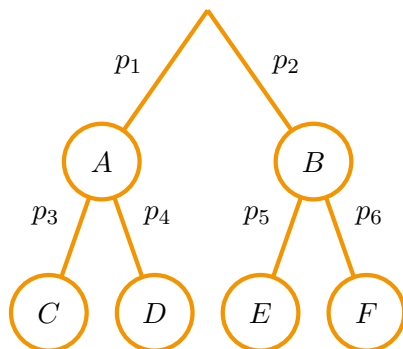


im Kontext von Zufallsexperimenten. Sie geben die Ergebnisse von Zufallsexperimenten an und beschreiben Ereignisse in Worten und stellen diese als Mengen beziehungsweise deren **Verknüpfung** dar.



3 Sicherung Baumung

Die Schülerinnen und Schüler stellen stochastische Sachverhalte mittels **Baumdiagrammen** und **Vierfeldertafeln** dar und interpretieren die darin enthaltenen Informationen.



	A	$\bar{A}$	
B	P_1	P_2	$P_1 + P_2$
$\bar{B}$	P_3	P_4	$P_3 + P_4$
	$P_1 + P_3$	$P_2 + P_4$	1

Sie berechnen die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen mit geeigneten Methoden, berechnen **bedingte Wahrscheinlichkeiten** und untersuchen Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

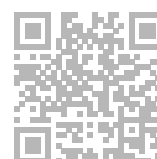
4 Sicherung Kombinierung

Die Schülerinnen und Schüler deuten eine reale Situation als kombinatorische Fragestellung und ermitteln die Anzahl von Möglichkeiten in einfachen Fällen.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

$$n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$



5 Sicherung Erwartung

Die Schülerinnen und Schüler erläutern die Begriffe **Zufallsgröße** und **Erwartungswert**.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Sie ermitteln die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** einer diskreten Zufallsgröße und stellen diese als Wertetabelle dar. Sie berechnen weiterhin den Erwartungswert und deuten diesen im Sachzusammenhang.

$$P : X(\Omega) \rightarrow [0; 1]$$

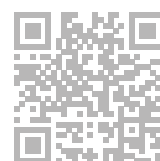
6 Sicherung Bernoullung

Die Schülerinnen und Schüler entscheiden, ob ein Zufallsexperiment ein **Bernoulli-Experiment** beziehungsweise eine Bernoulli-Kette darstellt.

$$|\Omega| = 2 \quad P(X_i = 1) = p; \quad P(X_i = 0) = 1 - p$$

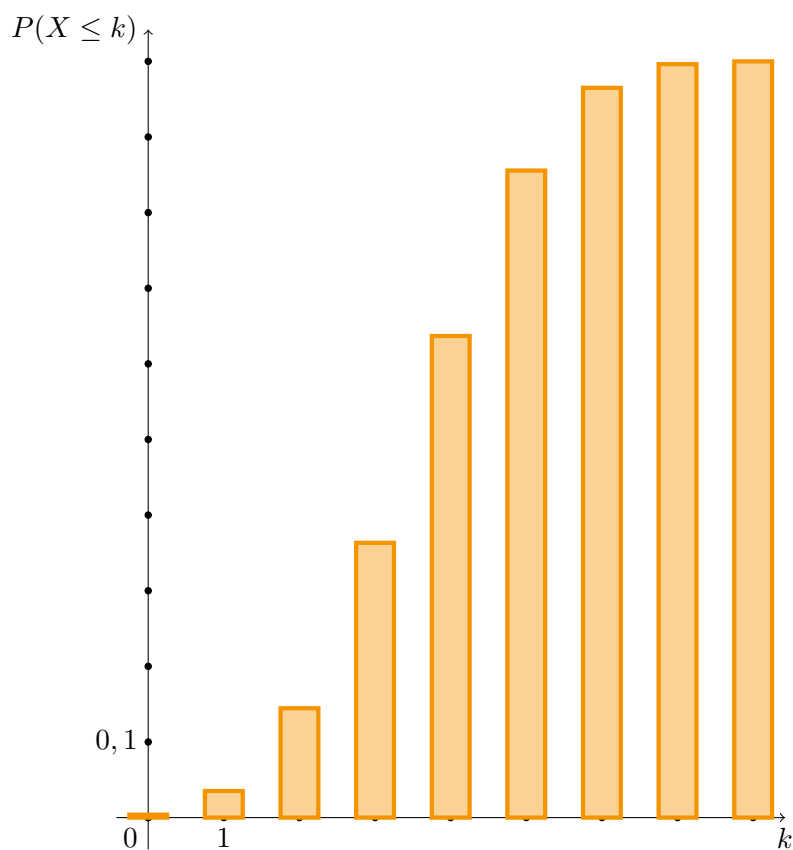
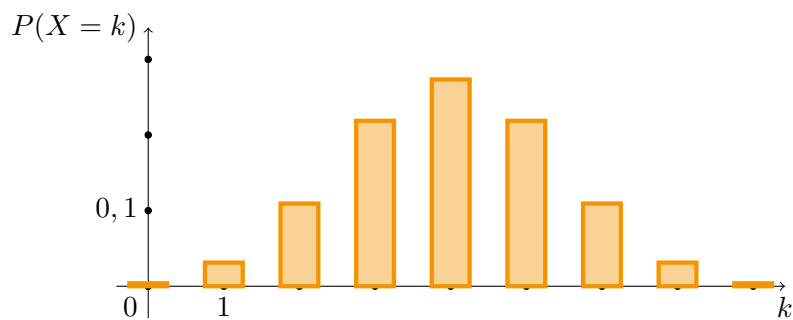
Sie geben die Zufallsgröße und die Parameter an und erläutern die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels der **Formel von Bernoulli** an Beispielen. Sie berechnen Wahrscheinlichkeiten mit dieser Formel unter Verwendung der mathematischen Symbolsprache. Darüber hinaus ermitteln die Schülerinnen und Schüler eine unbekannte Kenngröße.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

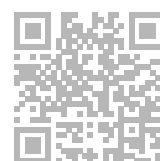


7 Sicherung Binomialverteilung

Die Schülerinnen und Schüler stellen die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** und die **Verteilungsfunktion** einer binomialverteilten Zufallsgröße tabellarisch und grafisch dar und erläutern den Einfluss der Parameter n und p .



Sie interpretieren tabellarische oder grafische Binomialverteilungen im Anwendungskontext und ermitteln aus entsprechenden Darstellungen Näherungswerte für Wahrscheinlichkeiten.



8 Sicherung Standardabweichung

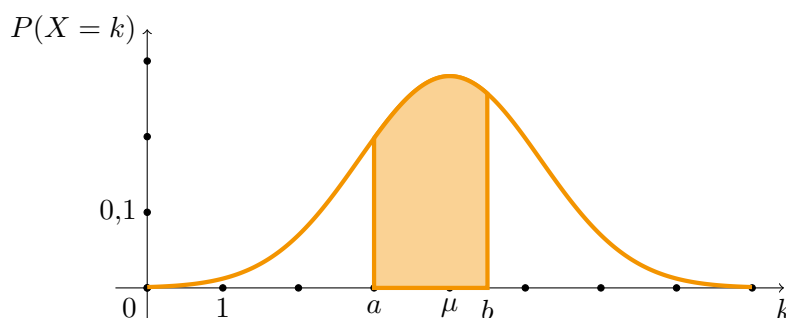
Die Schülerinnen und Schüler ermitteln den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von binomialverteilten Zufallsgrößen und interpretieren den Erwartungswert im Anwendungszusammenhang.

$$E(X) = n \cdot p \quad \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Sie erläutern die Bedeutung von Erwartungswert und Standardabweichung anhand der grafischen Darstellung von Wahrscheinlichkeitsfunktionen, insbesondere bei Approximation der Binomialverteilung durch eine zur Geraden $x = \mu$ symmetrischen Glockenkurve.

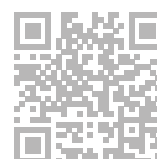
9 Sicherung Normalverteilung

Die Schülerinnen und Schüler nennen Beispiele für diskrete und stetige Zufallsgrößen. Sie untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen. Weiterhin nennen sie die Bedeutung der Parameter und im Anwendungskontext sowie für den Graph der Dichtefunktion und geben deren Funktionsterm an. Sie berechnen Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen und interpretieren diese als Fläche unter dem Graph der Dichtefunktion.



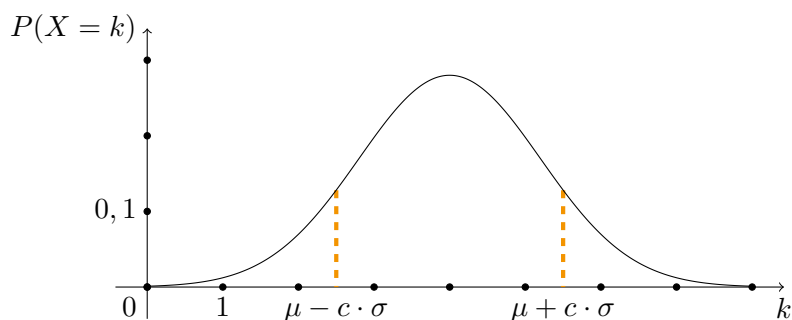
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) \cdot dx$$



10 Sicherung Sigmaregelung

Die Schülerinnen und Schüler erläutern die Sigma-Regeln für Normal- und Binomialverteilungen. Sie berechnen für diese Verteilungen Prognoseintervalle und interpretieren diese im Anwendungskontext. Wir berechnen den **Prognoseintervall** mit Hilfe der **σ -Regeln**:



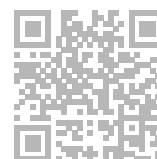
68,3 %	$[\mu - \sigma; [\mu + \sigma[$
95,4 %	$[[\mu - 2 \cdot \sigma; [\mu + 2 \cdot \sigma[$
99,7 %	$[[\mu - 3 \cdot \sigma; [\mu + 3 \cdot \sigma[$

11 Sicherung Intervallung

Die Schülerinnen und Schüler legen beispielhaft den Unterschied zwischen einem Prognoseintervall und einem **Konfidenzintervall** dar.

$$\mathbf{I} = \left[h - c \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}; h + c \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]; h = X \cdot n^{-1}$$

Sie deuten die relative Häufigkeit der Treffer bei Bernoulli-Experimenten als Punktschätzung für die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit. Die Schülerinnen und Schüler berechnen Konfidenzintervalle und interpretieren diese im Anwendungskontext. Schließlich erläutern sie den Zusammenhang zwischen der Größe der Stichprobe und der Länge des Konfidenzintervalls.



12 Übung Verteilung

12.0 Erläutere, unter welchen Voraussetzungen das Werfen eines Würfels ein Zufallsexperiment ist.

12.1 Ein fairer, handelsüblicher Würfel wird zufällig einmal geworfen. Gib an, welche der Ergebnismengen zu einem Laplace-Experiment gehören.

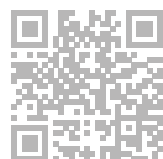
$$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$\Omega_2 = \{6; \text{nicht } 6\}$$

$$\Omega_3 = \{\text{Gerade; Ungerade}\}$$

$$\Omega_4 = \{\text{Primzahl; keine Primzahl}\}$$

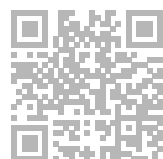
$$\Omega_5 = \{\text{Quadratzahl; keine Quadratzahl}\}$$



12.2 Zwei handelsübliche faire Würfel werden zufällig geworfen. X betrachtet alle möglichen Augensummen. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und ermittle empirisch die zugehörigen relativen Häufigkeiten.

12.3 Ein vierseitiger Würfel (Tetraeder) besitzt die Seitenflächen 1,2,3,4. Es besteht der Verdacht, dass der Würfel gezinkt ist. Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Augenzahl $k \in \{1,2,3,4\}$ zufällig zu werfen, sei proportional zu ihrer Augenzahl, also $P(W = k) = c \cdot k$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Ermittle rechnerisch $c \in \mathbb{R}$, gib die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung an und nimm Stellung zu der Aussage: 'Der Würfel ist gezinkt.'

12.4 Interpretiere das Zitat, das Einstein zugeschrieben wird: 'Der Zufall ist Gottes Art, anonym zu bleiben.' im Kontext des Gesetzes der großen Zahlen.



13 Übung Experimentierung

13.0 Erläutere den Unterschied zwischen den Begriffen 'Ereignis' und 'Ergebnis' mit Hilfe eines selbstgewählten Zufallsexperimentes.

13.1 Ein handelsüblicher Würfel wird zufällig geworfen. Angegeben sind mögliche Ereignisse. Gib jeweils das Gegenereignis an.

$$A = \{1\}$$

$$B = \{ \text{Primzahl} \}$$

$$C = \{ \text{Zahlenwert} > 2 \}$$

$$D = \{ \text{Gerade Zahl} \}$$

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$F = \{ \text{Zahlenwert} \leq 5 \}$$

$$G = \{ 2; 5 \}$$

$$H = \{ \text{Zahlenwert} \geq 5 \}$$

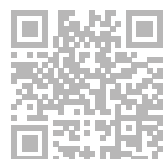
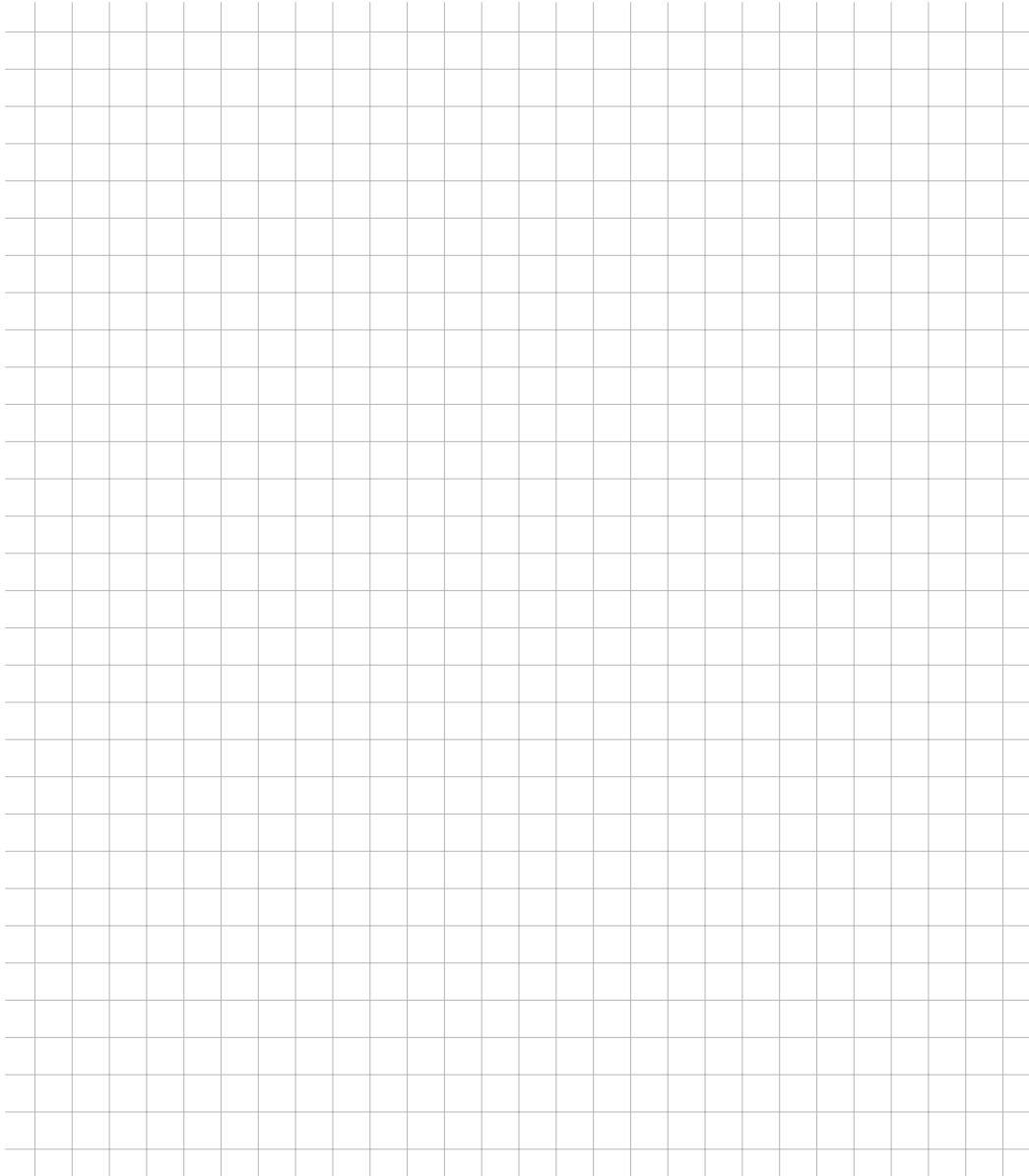


- 13.2 Zwei Laplace-Würfel A und B mit Ergebnismenge $S_1 = S_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ werden zufällig geworfen. Eine Zufallsgröße X ist für $a \in S_1$ und $b \in S_2$ gegeben durch:

$$X : (a, b) \rightarrow a + b$$

Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und gib die Ereignisse sowie ihre Gegenereignisse in aufzählender Schreibweise an, wenn gilt: $T = \{\text{Primzahl}\}$; $R = \{\text{Ungerade Zahl}\}$.

$$A = \bar{T} \quad B = T \cap R \quad C = T \cup \bar{R} \quad D = \bar{T} \cap \bar{R}$$



- 13.3 Untersuche die Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt: 'Sind A und B Mengen, so gilt:

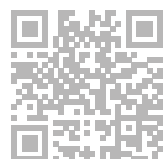
$$\overline{A} \cap B = (A \cup B) \setminus A$$

' $\setminus$ ' steht für ein mengentheoretisches 'ohne'. ' $\overline{A}$ ' steht für das Gegenereignis von A .



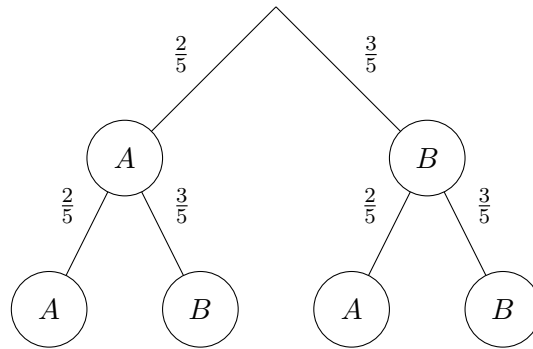
- 13.4 Überlege, welches Paradoxon auftaucht, wenn man die folgende Menge betrachtet:

$$M = \{\text{Alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten.}\}$$

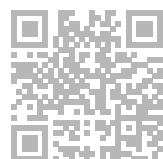


14 Übung Baumung

14.0 Beschreibe jeweils ein mögliches Zufallsexperiment.



	A	$\bar{A}$	
B	0,1	0,4	0,5
$\bar{B}$	0,3	0,2	0,5
	0,4	0,6	1



- 14.1 In einer Bonbonniere befindet sich ein blaues, zwei schwarze und drei silberne Bonbons. Es wird zweimal zufällig ohne Zurücklegen gezogen. Skizziere das entsprechende Baumdiagramm und berechne damit die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

$A = \{\text{zweimal dieselbe Farbe}\}$

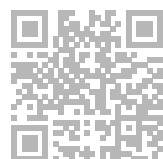
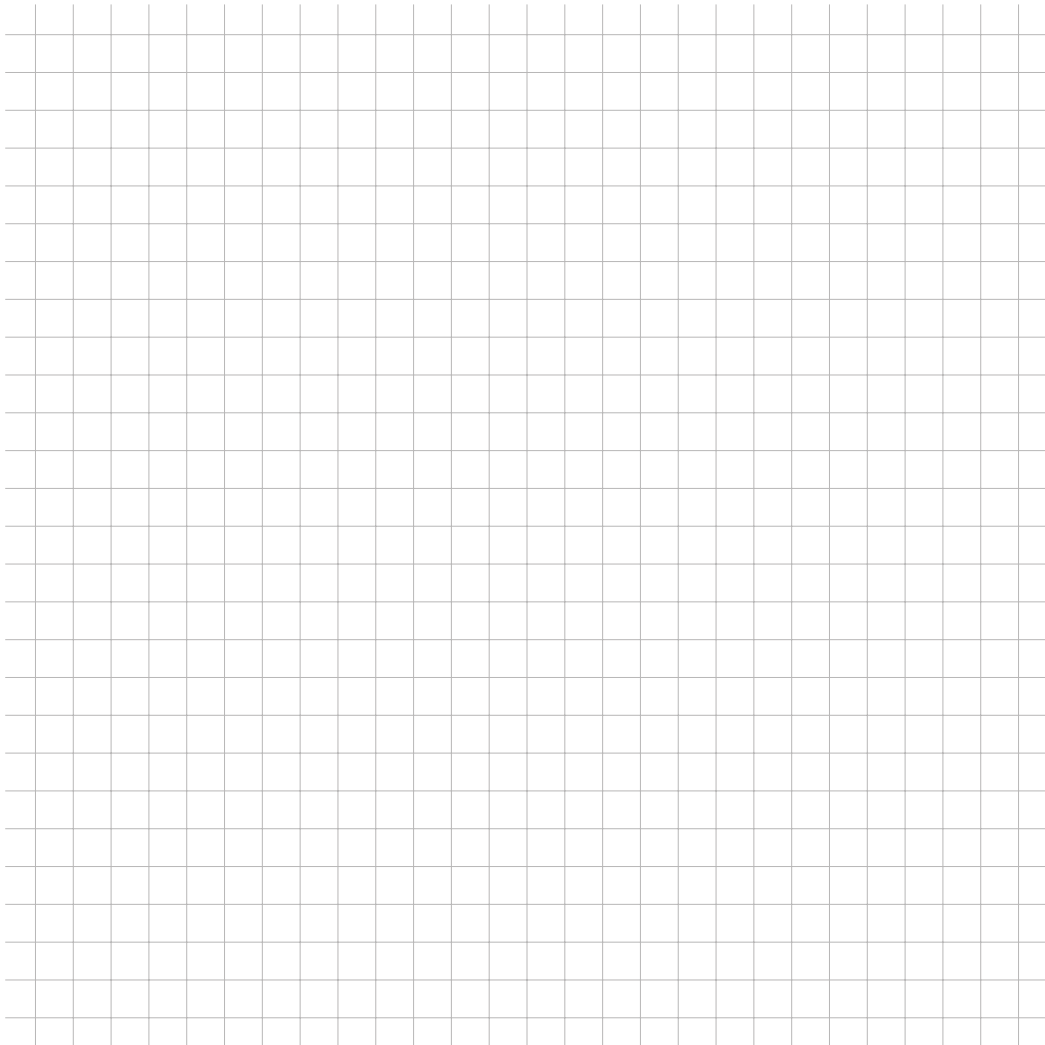
$B = \{\text{zuerst ein blaues Bonbon, dann ein silbernes Bonbon}\}$

$C = \{\text{ein blaues Bonbon und ein silbernes Bonbon}\}$

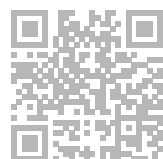
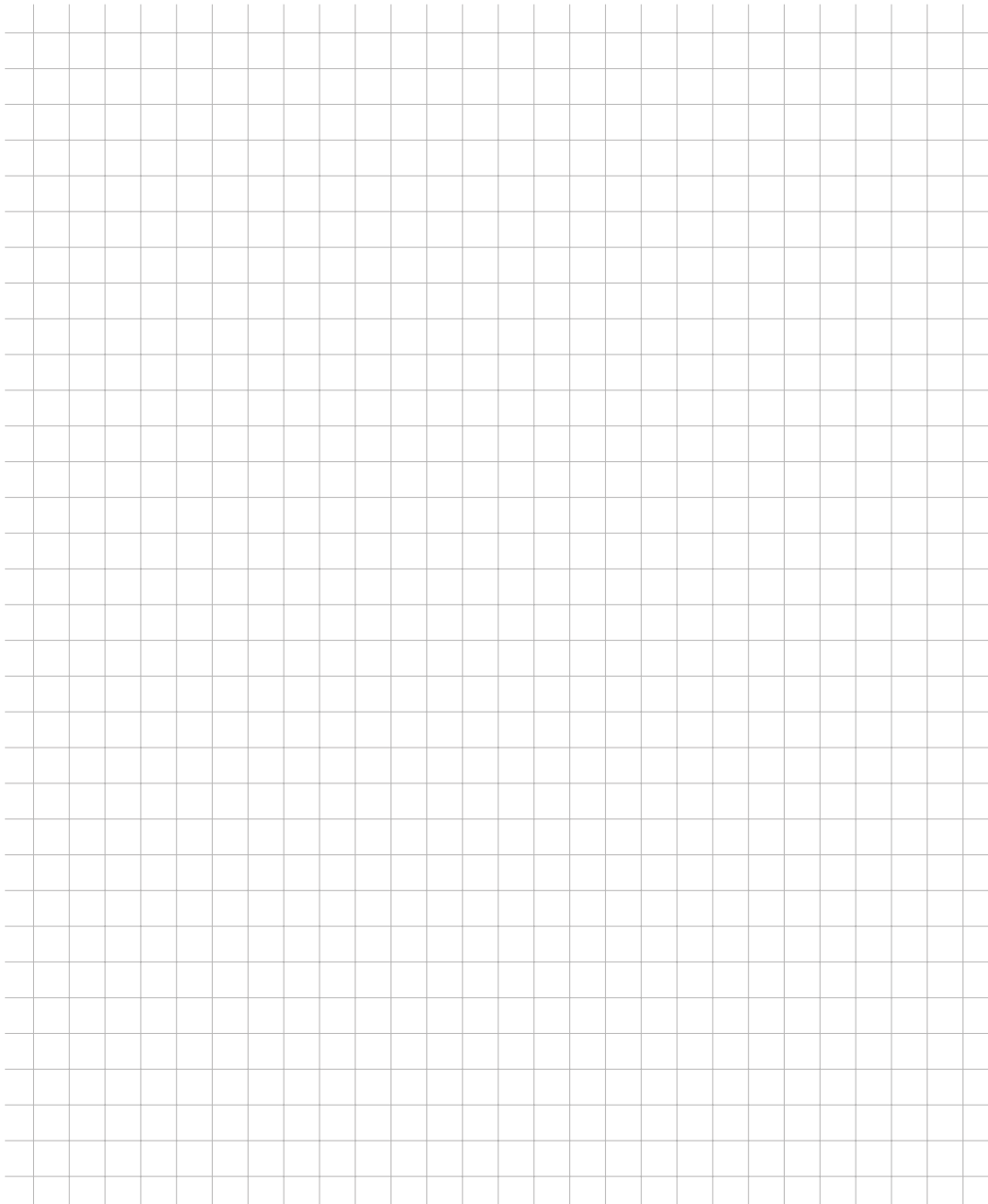
$D = \{\text{nur blaue oder silberne Bonbons}\}$

$E = \{\text{zwei blaue Bonbons}\}$

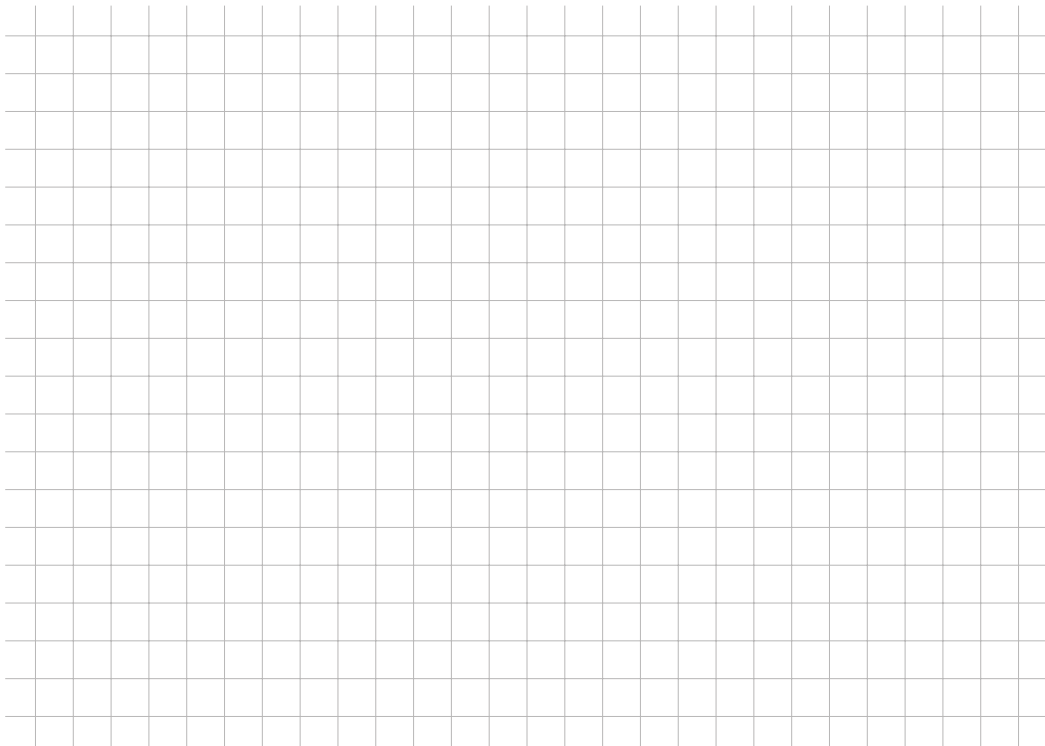
$F = \{\text{nicht zweimal dieselbe Farbe}\}$



- 14.2 In einer Klasse mit 30 Schülern sind 12 Vegetarier. 20 Schüler sind schlecht in Mathe, von denen wiederum die Hälfte Vegetarier sind. Gib die zugehörige Vierfeldertafel an. Zeige, dass die Ereignisse stochastisch abhängig sind. Berechne die prozentuale Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Vegetarier schlecht in Mathe ist. Berechne die prozentuale Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der schlecht in Mathe ist, ein Vegetarier ist.

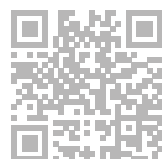
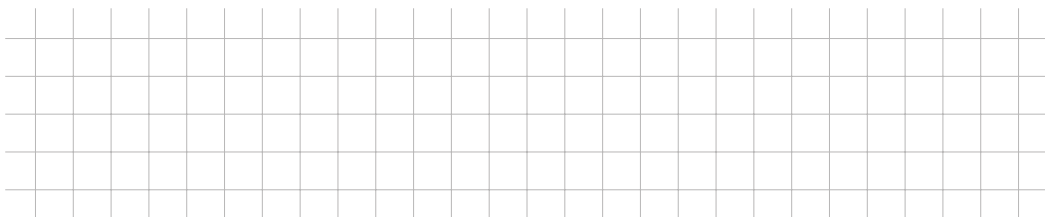


- 14.3 Zwei Elefanten spielen Russisch Roulette. Sie benutzen einen fairen Trommelrevolver mit sechs Kammern. Nur in einer Kammer ist eine Patrone. Sie drehen die Trommel vor dem Spiel so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Kugel in einer Kammer befindet, für alle Kammern gleich groß ist. Danach drücken sie abwechselnd (dabei wird die Trommel immer um eine Position weiterbewegt), bis die Platzpatrone platzt. Ermittle mit Hilfe eines geeigneten Baumdiagrammes, welcher Elefant die höhere Überlebenswahrscheinlichkeit hat.



- 14.4 Der Elefant zieht zufällig Bonbons aus seiner Bonbonniere mit n roten und drei weißen Bonbons. Ermittle, wie viele rote Bonbons mindestens in der Bonbonniere sein müssen, damit der Elefant mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 42 % beim dreimaligen Ziehen mindestens zwei rote Bonbons zieht.

Taschenrechner!



15 Übung Kombinierung

15.0 Ordne den Rechenterm jeweils der kombinatorischen Fragestellung zu und überprüfe dein Ergebnis beispielhaft.

$$\binom{n}{k} \quad n! \quad n^k$$

15.0.0 Zuordnung von n Personen auf n Plätze

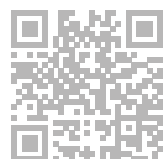
15.0.1 Zahlenschloss mit k Rädchen mit jeweils n Ziffern

15.0.2 Lottoziehung k richtige Zahlen aus n möglichen Zahlen



15.1 Berechne jeweils.

$$5! \quad 3^4 \quad \binom{5}{2} \quad 7! \quad 2^8 \quad \binom{7}{6}$$



15.2.2 Eine Eiswaffel wird mit je einer Kugel der Sorten Himbeere, Schokolade und Vanille bestückt.

$$\binom{n}{n} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{1}$$

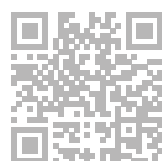

15.4 Zeige, dass der binomische Lehrsatz für $a, b \in \mathbb{R}$ und für $n = 2$ gilt:

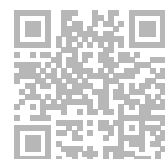
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$



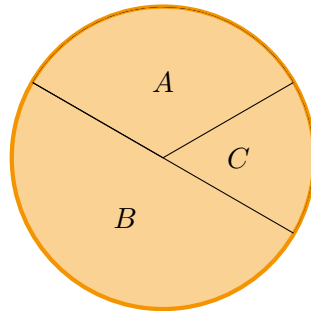
15.5 Zeige, dass der binomische Lehrsatz für $a, b \in \mathbb{R}$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

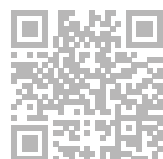
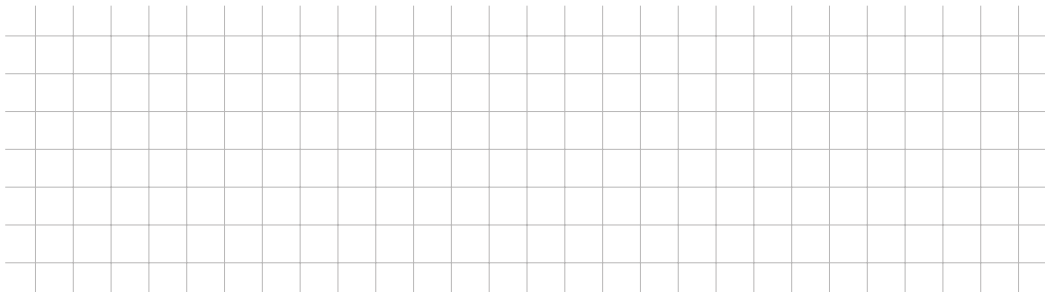




- 16.3 Ein Glücksradbetreiber hat das abgebildete Glücksrad mit den Sektoren A , B und C . Er möchte ein zufälliges Spiel anbieten, bei dem er langfristig im Durchschnitt 1 Euro pro Spiel gewinnt. Im Sektor A soll der Gewinn 2 Euro, im Sektor B soll der Gewinn 1 Euro und im Sektor C soll der Gewinn 0 Euro betragen. Berechne den Einsatz, den er verlangen muss.



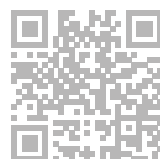
- 16.4 Erläutere an einem geeigneten Beispiel, inwiefern der Erwartungswert nicht ausreicht, um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu beschreiben.



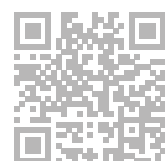
17 Übung Bernoullung

$$n = 3, k = 2, p = 0, 5 \quad n = 4, k = 4, p = 0, 1 \quad n = 5, k = 4, p = 0, 25$$

17.2 Gib jeweils die Wahrscheinlichkeit für $p=0,3$ und $n=42$ an.

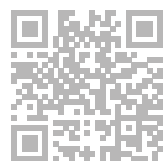
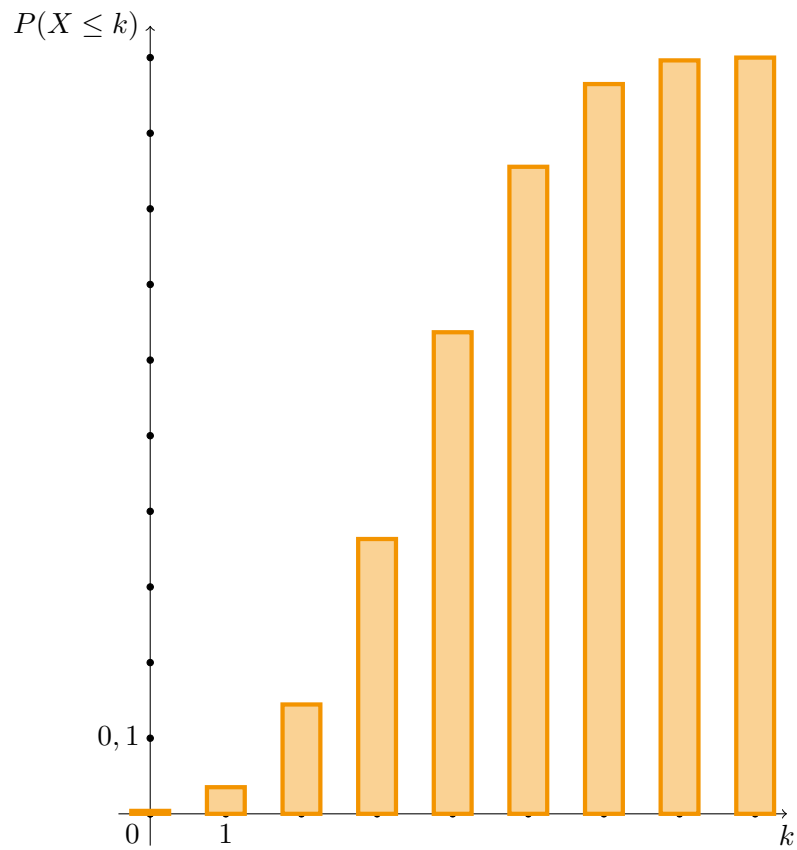


17.3.1 Ermittle, wie oft er mindestens schießen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens fünf Treffer zu erzielen.

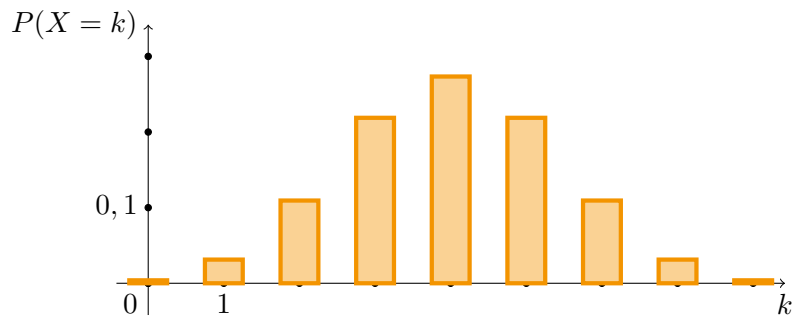


18 Übung Binomialverteilung

18.0 Skizziere zum angegebenen Histogramm einer Verteilungsfunktion die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion.

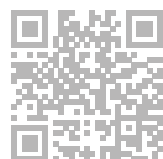


18.1 Gegeben ist das Histogramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion einer binomialverteilten Zufallsgröße X .

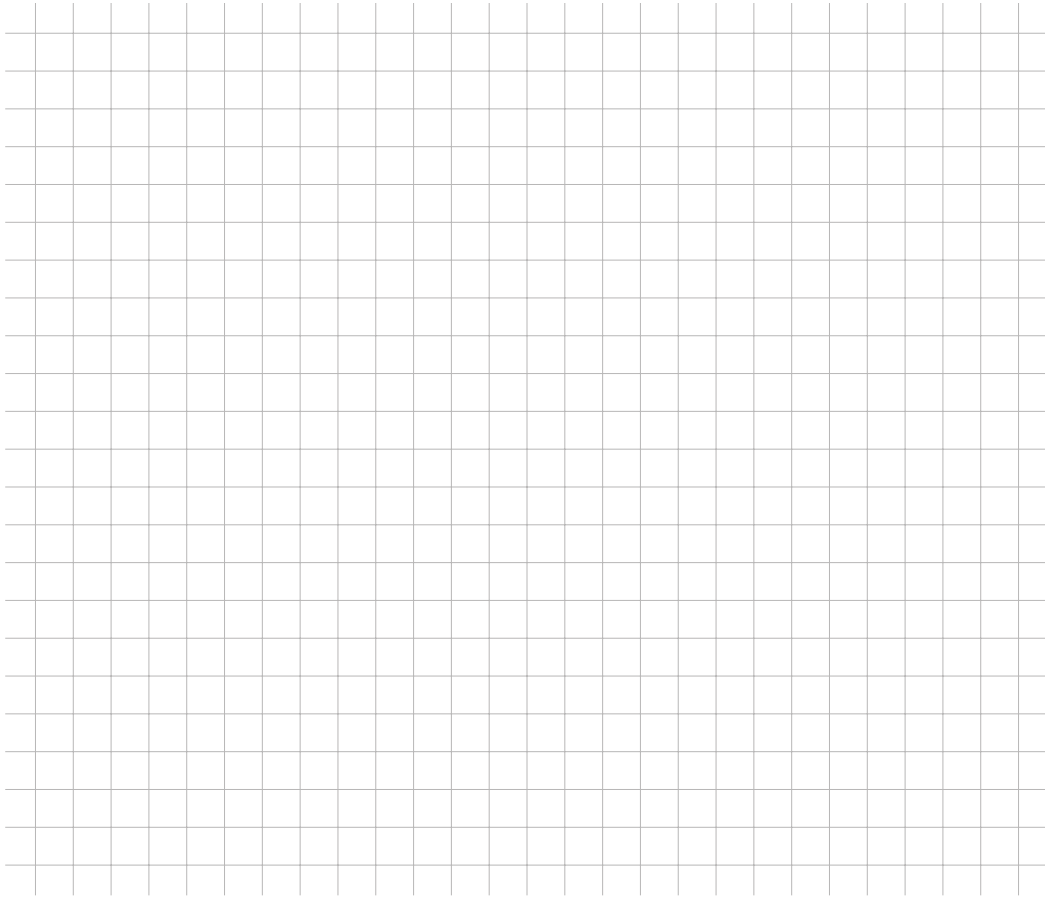


Gib n und p an, beschreibe ein mögliches zugehöriges Zufallsexperiment und gib näherungsweise die Wahrscheinlichkeit für $k \in [2; 5]$ an.

18.2 Skizziere das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n = 4$ und $p = 0,5$.

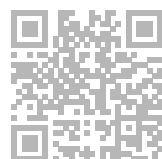
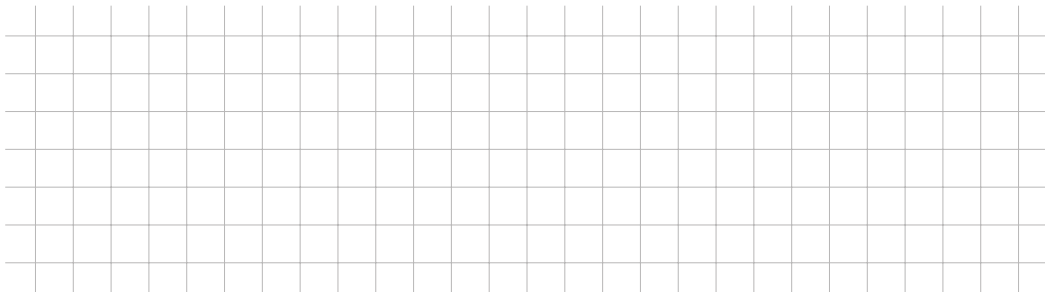


18.3 Skizziere das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n = 5$ und $E(X) = 4$.

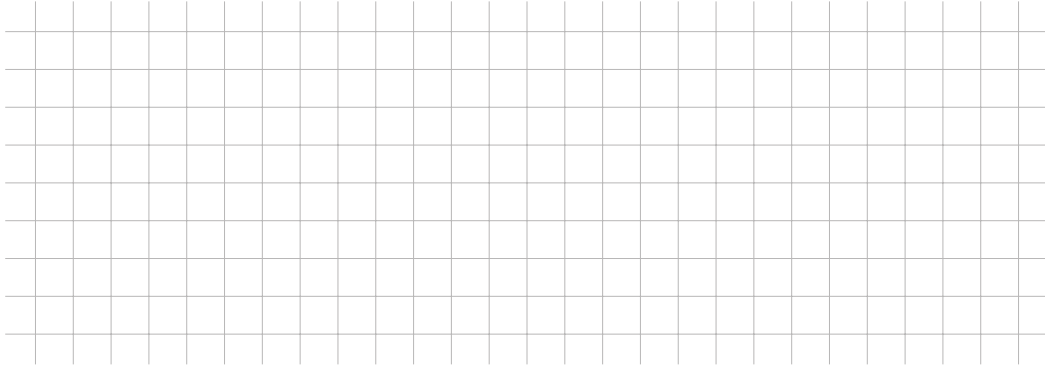


18.4 Beschreibe , wie man mit dem Taschenrechner eine Wertetabelle für die Histogramme von Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion einer binomialverteilten Zufallsgröße bestimmt.

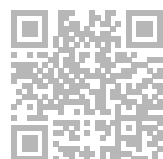
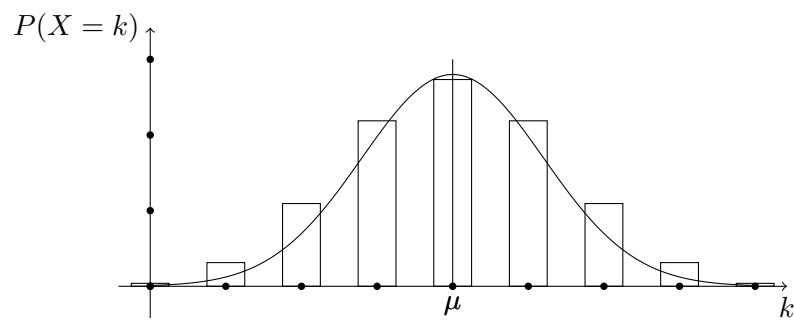
Taschenrechner!



19.3 Berechne die Standardabweichung von X , wenn X binomialverteilt mit $n = 400$ und $p = 0,5$ ist.



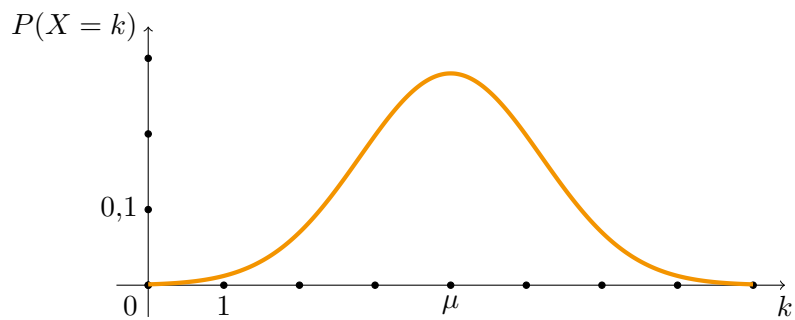
19.4 Erläutere mit Hilfe der Darstellung die graphische Bedeutung von Erwartungswert und Standardabweichung.



20 Übung Normalverteilung

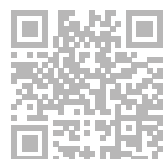
20.0 Beschreibe ein Zufallsexperiment, das sich sowohl binomialverteilt als auch normalverteilt modellieren lässt.

20.1 Gegeben ist die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X .



Ermittle jeweils näherungsweise:

$$P(2 \leq X \leq 5) \quad P(3 \leq X \leq 7) \quad P(0 \leq X \leq 8)$$

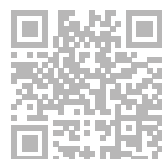


- 20.2 Ein Sägewerk verkauft Bretter mit einer Dicke von 25mm. Aus einer Qualitätskontrolle weiß man, dass die Dicke der Bretter näherungsweise normalverteilt mit $\mu = 25\text{mm}$ und $\sigma = 0,42\text{mm}$ ist. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Brett mehr als 24,9mm und höchstens 25,1mm dick ist.

Taschenrechner
erlaubt!

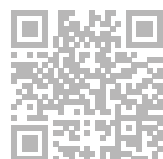
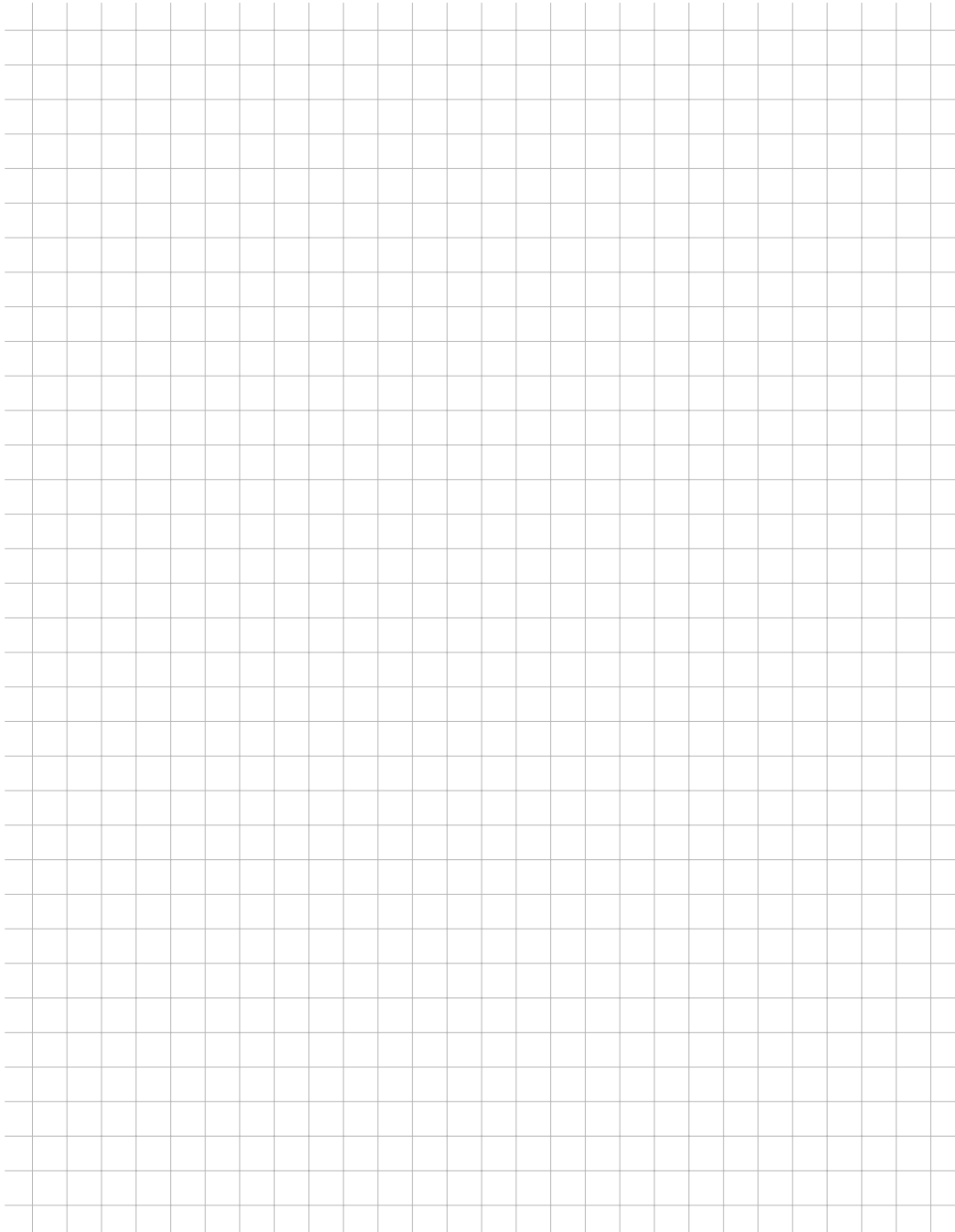


- 20.3 Gib den Wert von $P(X = a)$ für $a \in \mathbb{R}$ einer normalverteilten Zufallsvariable X an und erläutere dein Ergebnis grafisch.



20.4 Ermittle rechnerisch die Koordinaten des Hochpunktes und der Wendepunkte der Dichtefunktion φ , wenn gilt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



21 Übung Sigmaregelung

21.0 Gib die drei Sigmaintervalle für $\mu = 12$ und $\sigma = 1,5$ an.

21.1 Das Zuspätkommen von Schülern lässt sich modellieren durch eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 7$ und $\sigma = 2$. Erläutere die drei Sigmaregeln im Sachkontext.

21.2 Gib die drei Sigmaintervalle einer normalverteilten Zufallsgröße X mit $n = 48$ und $p = 0,5$ an.



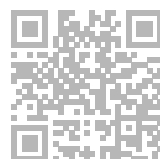
21.3 Gib an, wie viel Prozent der Ergebnisse einer normalverteilten Zufallsgröße X im jeweiligen Intervall sind.

$$[0; \mu - \sigma] \quad [\mu; \mu + 2 \cdot \sigma] \quad [\mu - \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma]$$



21.4 Ermittle den Wert des Integrales.

$$\int_{39}^{51} \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-42}{3}\right)^2} \cdot dx$$



22 Übung Intervallung

Prognoseintervall.

Hilfe einer Stichprobe mit $n = 100$, $h = 0,3$ und $c = 1$ an.

Taschenrechner!

Hilfe einer Stichprobe mit $n = 100$ und $X = 42$ mit $c = 2$ an.

Taschenrechner!

liegt.

Taschenrechner!

Länge des Konfidenzintervalles.



