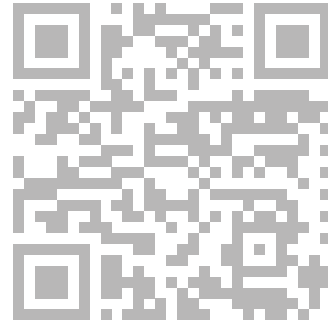


Die vollständige Induktion vertieft das mathematisch
logische Denken der Schülerinnen und Schüler durch die
konsequente Anwendung des Induktionsschlusses auf
komplexe Aussagen.



Induktionung

Exposition

Komplikation

Motivierung

Peripetie

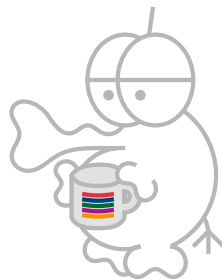
Sicherung Induktionung

Peripetie

Übung Induktionung

Katastrophe

Testung

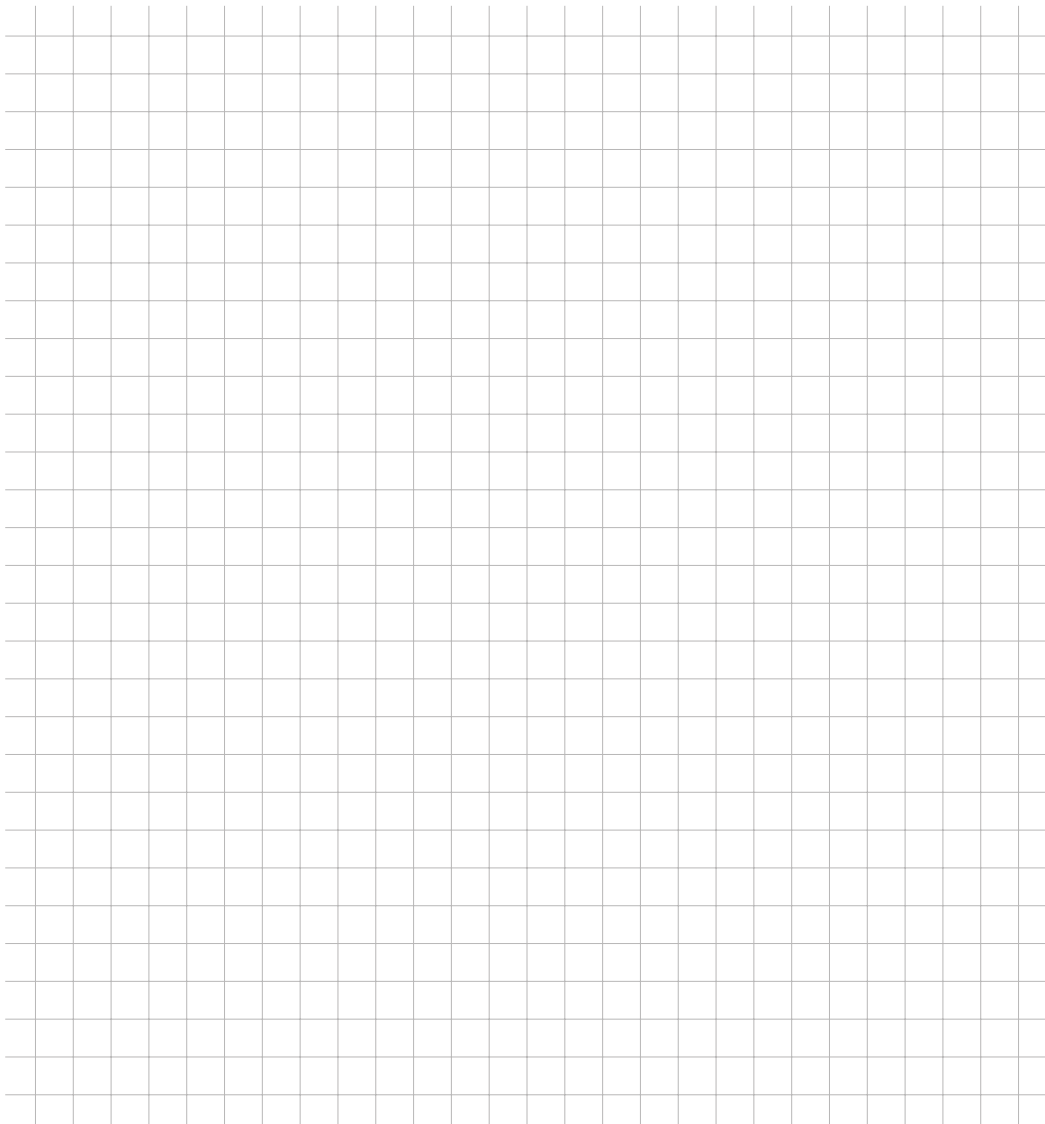
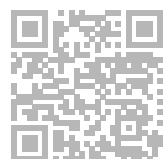


Kaffee
~~Motke~~ liebsch

0 Motivierung

Im Jahr 1786 stellte Johann Georg Büttner, der für seine Strenge bekannte Rechenlehrer der Katharinen-Volksschule in Braunschweig, seiner Klasse eine zeitintensive Aufgabe: Die Schüler sollten alle ganzen Zahlen von 1 bis 100 aufaddieren. Zum Erstaunen des Lehrers legte der erst neunjährige Carl Friedrich Gauß seine Schiefertafel bereits nach wenigen Augenblicken mit der korrekten Lösung auf den Tisch. Untersuche, wie Gauß die Aufgabe auf einen Blick löste, und zeige, dass seine Methode verallgemeinert für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ($n \in \mathbb{N}$) gilt.

Für Fehler gab es
die Prügelstrafe!



1 Sicherung Induktion

Die Schülerinnen und Schüler nutzen effiziente Schreibweisen für **Summen**

$$\sum_{k=n}^m s(k) := s(n) + s(n+1) + \dots + s(m)$$

und **Produkte**.

$$\prod_{k=n}^m s(k) := s(n) \cdot s(n+1) \cdot \dots \cdot s(m)$$

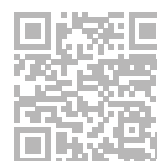
Sie beweisen auch mit Nutzung dieser Schreibweisen mathematische Sätze mit Hilfe von **Vollständiger Induktion**. Dabei zeigen sie üblicherweise die Korrektheit der Aussage A mit dem **Induktionsanfang**

$$A(1)$$

und vervollständigen den Beweis mit Hilfe des **Induktionsschrittes**

$$A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

indem sie unter der Annahme, dass die Aussage für n gilt zeigen, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt.



2 Übung Induktionung

2.0 Schreibe jeweils mit Hilfe des Summen-/Produktzeichens.

2.0.0

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots$$

2.0.1

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \dots$$

2.0.2

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + \dots$$

2.0.3

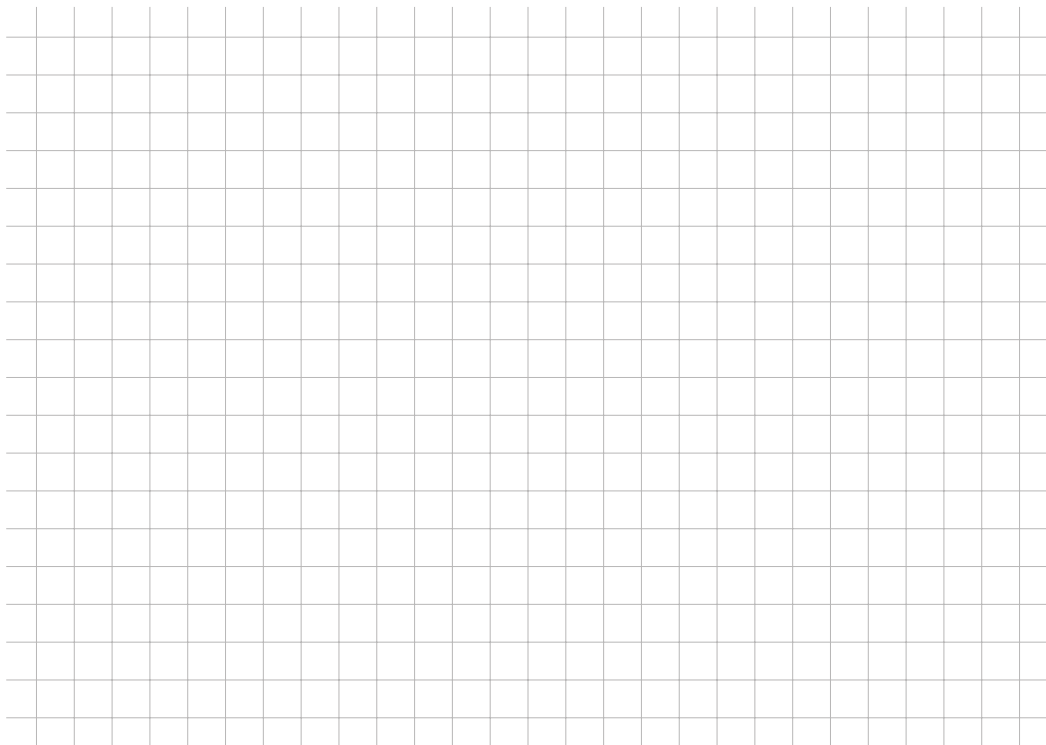
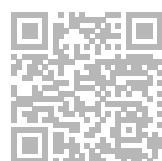
$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot 9^2 \cdot 10^2 \cdot \dots$$

2.0.4

$$1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \dots$$

2.0.5

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \dots$$



2.1 Untersuche die Summenregeln mit Hilfe von vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$.

2.1.0

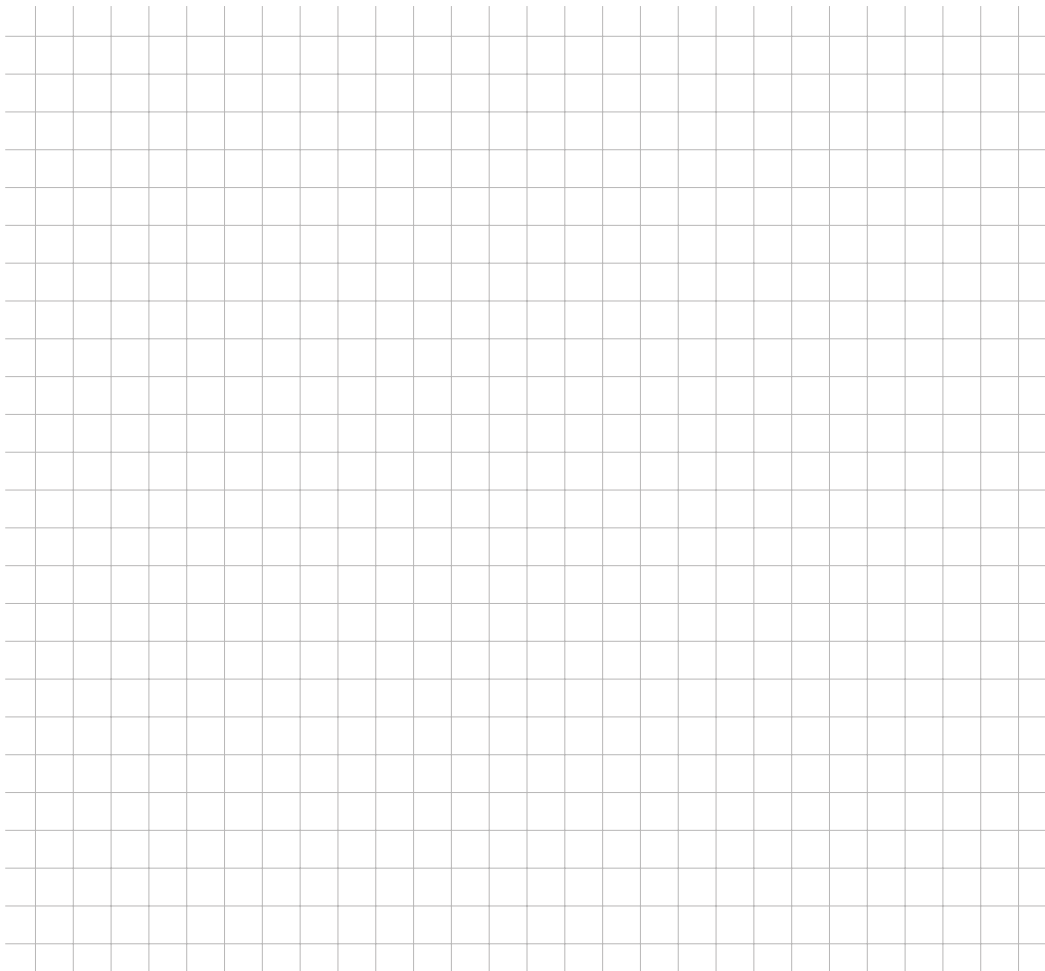
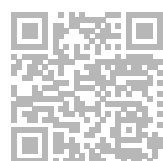
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

2.1.1

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

2.1.2

$$\sum_{i=1}^{2 \cdot n - 1} i = n^2$$



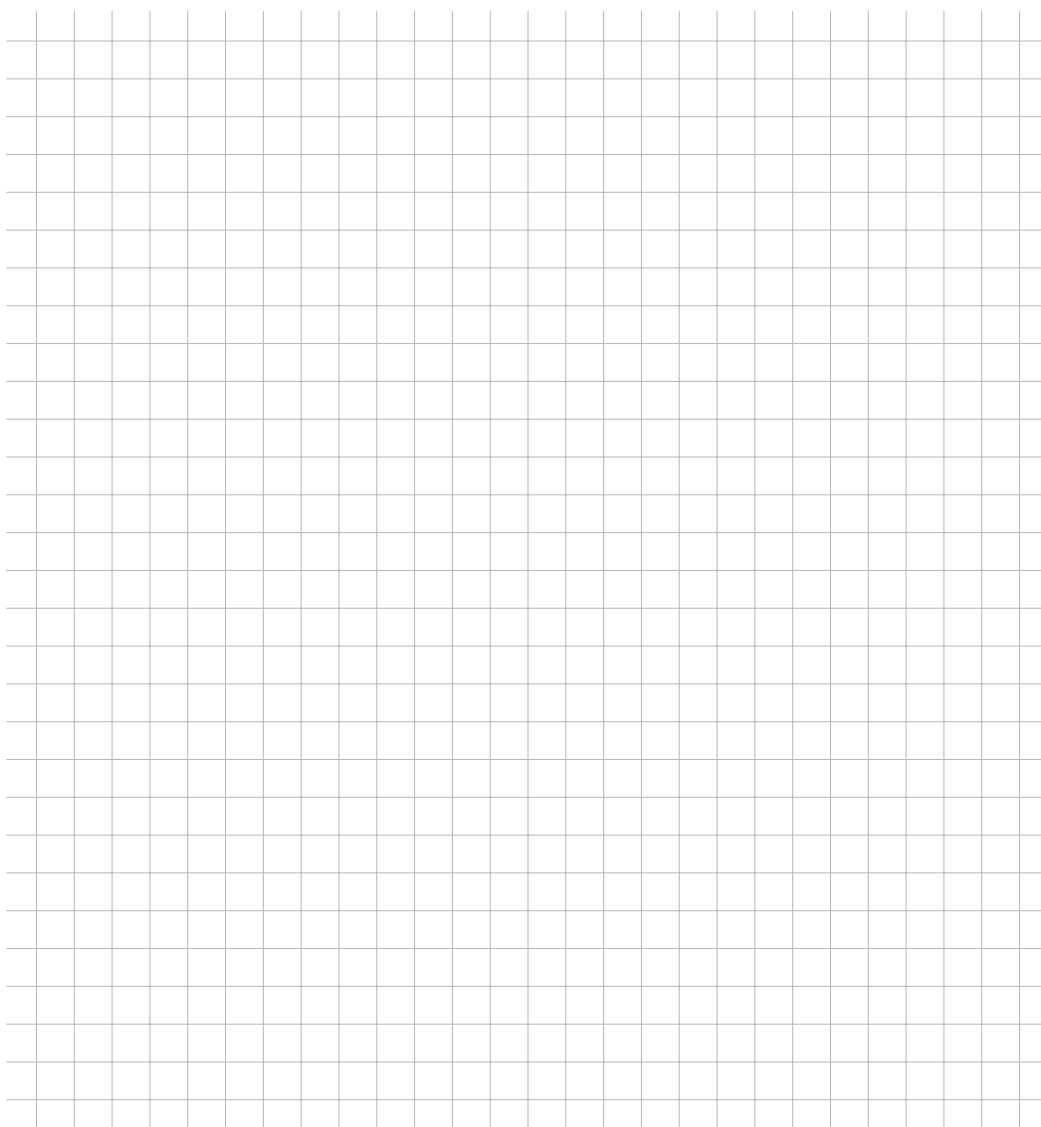
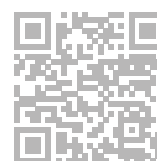
2.2 Untersuche die Produktregeln mit Hilfe von vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$.

2.2.0

$$\prod_{i=1}^n 4^i = 2^{n \cdot (n+1)}$$

2.2.1

$$\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n} \quad \text{für } n \geq 2$$



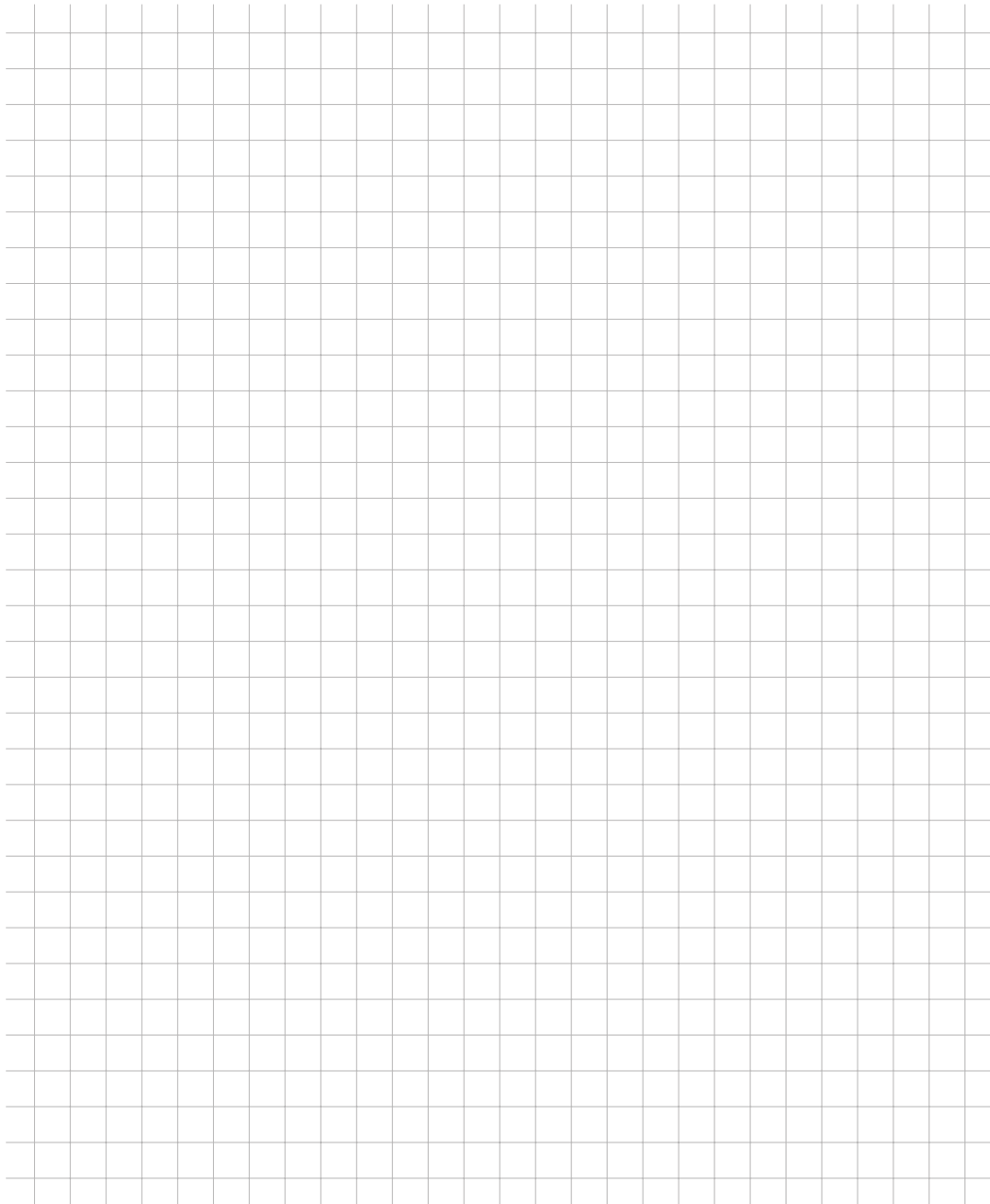
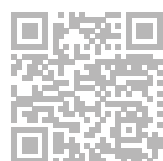
2.3 Untersuche die Teilbarkeitsregeln mit Hilfe von vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$.

2.3.0 $n^2 + n$ ist durch zwei teilbar.

2.3.1 $n^3 + 2n$ ist durch drei teilbar.

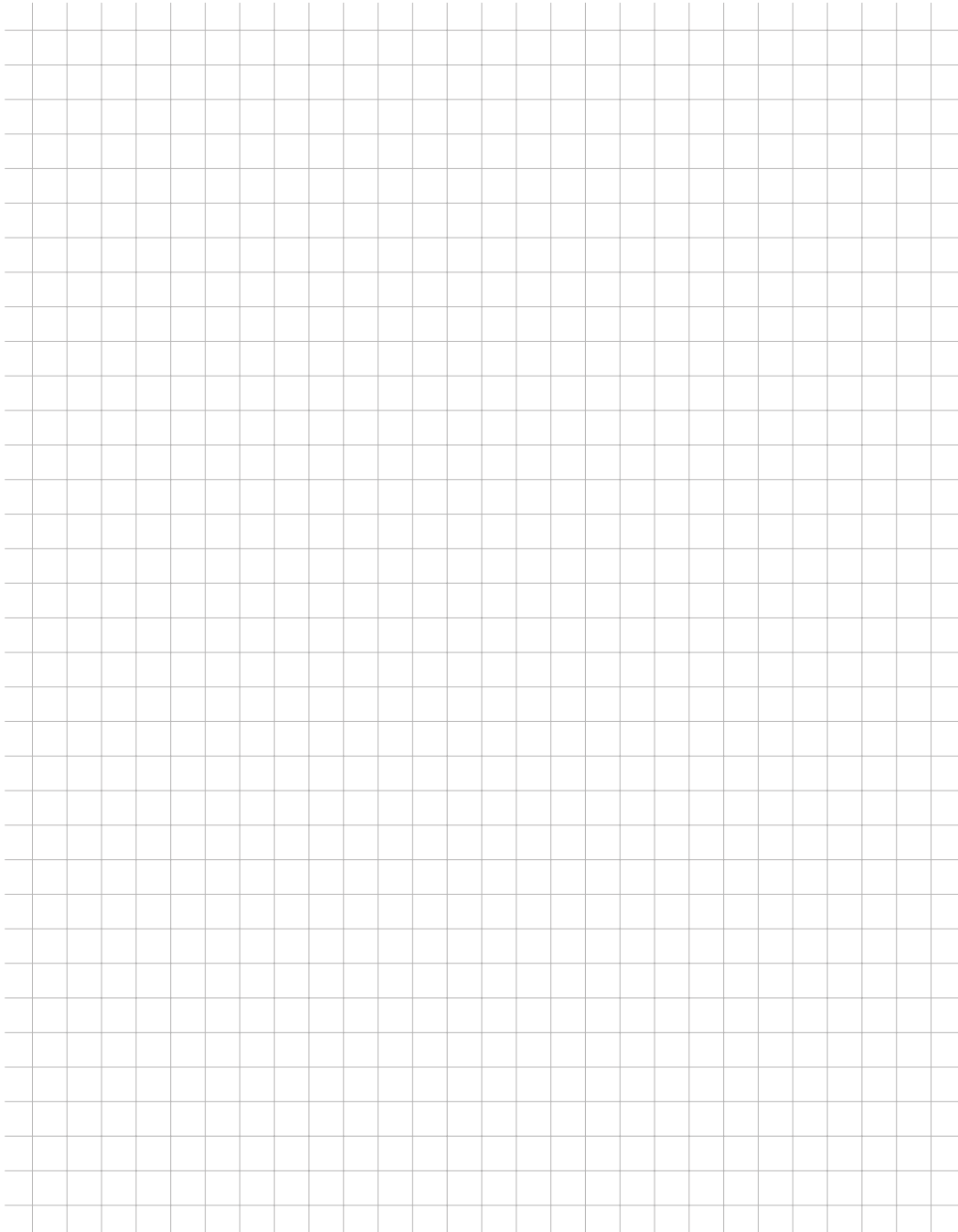
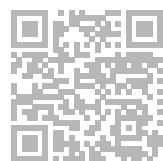
2.3.2 $4 \cdot n^3 - n$ ist durch drei teilbar.

2.3.3 $n^3 - n$ ist durch sechs teilbar.



2.4 Zeige, dass die Winkelsumme W für $n \in \mathbb{N}$ in einem konvexen n -Eck gegeben ist durch:

$$W = (n - 2) \cdot 180^\circ$$



3 Testung

Zeige, dass der binomische Lehrsatz für $a, b \in \mathbb{R}$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

