1 Aufgaben

Oberschulamt Stuttgart

Sommer 1977

Außerordentliche Prüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 1976/77

Prüfungsfach: Mathematik
Prüfungszeit: 18o Minuten
Hilfsmittel : Funktionentafel mit zugehöriger Formelsammlung, Rechenschieber
Verlangt : Von den 5 Aufgaben sind 3 nach Wahl des Bewerbers zu bearbeiten

Aufgabe 1:

Gegeben: $f(x) = \frac{a}{x} - b$ und $g(x) = \frac{b}{x} - \frac{b}{a}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Gesucht:

a) Schnittpunkte der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$. Fallunterscheidungen !

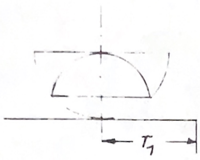
b) Untersuchung der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ für $a = 2$ und $b = 1$, auf

1) Nullstellen
2) Extrem- und Wendepunkte
3) Pole mit bzw. ohne Zeichenwechsel
4) Asymptoten
5) Funktionsgraphen für $\mathbb{D} = \{x \mid -6 \leq x \leq 6\}$ (1 LE = 1 cm)

c) Schnittpunkte der Normalen in den Nullstellen der Funktionsschar $g(x)$ mit den Graphen von $g(x)$.

Aufgabe 2:

In eine Halbkugel mit Radius r_1 wird eine zweite Halbkugel einbeschrieben, in diese eine dritte Halbkugel usw..



a) Welches Volumen und welche Oberfläche (nur gekrümmte Oberfläche) hat die fünfte Halbkugel ?

b) Welches Volumen und welche Oberfläche (nur gekrümmte Oberfläche) haben die n ersten Halbkugeln ?
Wie groß sind Volumen und Oberfläche für n gegen unendlich ?

c) Weisen Sie durch vollständige Induktion die Allgemeingültigkeit der Formel für die Summe der Oberflächen nach:

$$S_n = 4\pi r_1^2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Aufgabe 3:

Gegeben: $y = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{x + 2}$

Gesucht:

a) Definitionsbereich

b) Symmetrieeigenschaften

c) Nullstellen, Pole

d) Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte

e) Koordinaten der Wendepunkte

f) Gleichung der Wendetangente

g) Gleichung der Näherungskurve für große $|x|$ in der Form $y_2 = ax^2 + bx + c$

h) Gleichung der Näherungskurve für kleine $|x|$

i) Funktionsgraph für alle drei Kurven für

$$\mathbb{D} = \{x \mid -5 \leq x \leq 6\} \quad (1 \text{ LE} = 1 \text{ cm})$$

Aufgabe 4:

Über den vier Seiten eines Quadrates von veränderlicher Seite x zeichnet man nach außen vier kongruente, gleichschenkliche Dreiecke, deren Schenkel die Länge a haben (für die Zeichnung z.B. $x = 8$ cm, $a = 4{,}3$ cm).

a) Für welche Werte von x wird der Inhalt des so entstehenden Achtecks am größten oder am kleinsten ?

b) Ist das entstehende Achteck größten Inhalts ein regelmäßiges Achteck ?

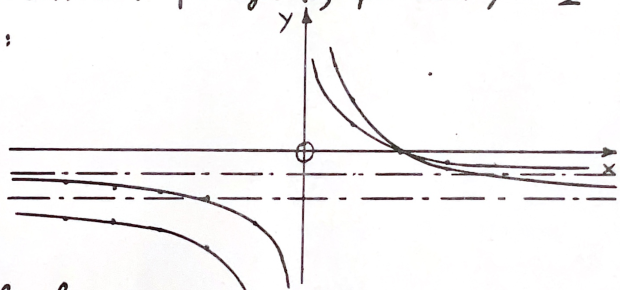
Aufgabe 5:

Gegeben: $y = x - \sin 2x$

Gesucht:

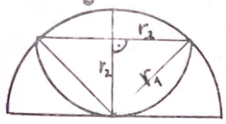
a) Symmetrieeigenschaften
b) Koordinaten der Schnittpunkte mit $y = x$
c) Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte
d) Koordinaten der Wendepunkte
e) Lösungsweg zur Bestimmung der Nullstellen
f) Funktionsgraph für $\mathbb{D} = \{x \mid -\pi \leq x \leq \pi\}$
   (1 LE = 2 cm)

Lösung: (1)	Punkte:
a) Es ist $\frac{a}{x} - b = \frac{b}{x} - \frac{b}{a}$, für $x \neq 0,\ a \neq 0$	1
daraus wird $x \cdot b\,(a-1) = a\,(a-b)$	1
Fall I: $a \neq 1$: für $b \neq 0$: $\mathbb{L} = \left\{ \frac{a(a-b)}{b(a-1)} \right\}$	1
für $b = 0$: $\mathbb{L} = \{\ \}$	1
Fall II: $a = 1$, für $b \neq 1$: $\mathbb{L} = \{\ \}$	1
für $b = 1$: $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	1
b) Es ist $f(x) = \frac{2}{x} - 1$; $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$; $f''(x) = \frac{4}{x^3}$; $f'''(x) = -\frac{12}{x^4}$	1
Nullpunkt $N(2\|0)$; Keine Extrema; Keine Wendepunkte	1
Pol m.V.Z.W. bei $x=0$; Waagr. Asymptote bei $y=-1$	1
Es ist $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$; $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $g''(x) = \frac{2}{x^3}$; $g'''(x) = -\frac{6}{x^4}$	1
Nullpunkt $N(2\|0)$; Keine Extrema; Keine Wendepunkte	1
Pol m.V.Z.W. bei $x=0$; Waagr. Asymptote bei $y=-\frac{1}{2}$	1
Graph:	2



c) Es ist $\frac{b}{x} - \frac{b}{a} = 0$ oder $x = a$, also $N(a\|0)$	1
Dazu $g(x) = \frac{b}{x} - \frac{b}{a}$; $g'(x) = -\frac{b}{x^2}$; $g'(a) = -\frac{b}{a^2}$	1
Steigung der Normalen: $m = \frac{a^2}{b}$	1
Gleichung der Normalenn: $y = \frac{a^2}{b}x - \frac{a^3}{b}$	1
Für $n \cap g(x)$ gilt: $\frac{a^2}{b}x - \frac{a^3}{b} = \frac{b}{x} - \frac{b}{a}$	
Daraus ergibt sich: $x = a \vee x = -\frac{b^2}{a^3}$	4
Somit $S\left(-\frac{b^2}{a^3} \,\middle|\, -\frac{a^4+b^2}{ab}\right)$	2
	Σ 24

Lösung: (2) Punkte:



Es ist $r_1 = r_2\sqrt{2}$, also $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} r_1$

$r_3 = \frac{1}{2} r_1$

$r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4} r_1$; $r_5 = \frac{1}{4} r_1$ 4

a) Es ist $V_5 = \frac{2}{3}\pi r_5^3 = \frac{1}{96}\pi r_1^3$ 2

und $O_5 = 2\pi r_5^2 = \frac{1}{8}\pi r_1^2$ 2

oder: $V_1, V_2, V_3, \dots$ bildet eine geom. Folge mit $q = \frac{\sqrt{2}}{4}$

ebenso: $O_1, O_2, O_3, \dots$ " " " " " $q = \frac{1}{2}$

Somit $V_5 = V_1 \cdot q^{n-1} = \frac{2}{3}\pi r_1^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^4 = \frac{1}{96}\pi r_1^3$

und $O_5 = O_1 \cdot q^{n-1} = 2\pi r_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}\pi r_1^2$

b) Es ist $S_n = V_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{3}\pi r_1^3 \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{8}{3}\pi r_1^3 \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{4-\sqrt{2}}$ 2

also $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{3(4-\sqrt{2})}\pi r_1^3$ 2

Es ist $S_n = O_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2\pi r_1^2 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 4\pi r_1^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ 2

also $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 4\pi r_1^2$ 2

c) I. Schritt: Die Formel ist richtig für $n=1$

II. Schritt: Wir vermuten, die Formel ist richtig für weitere $n \in \mathbb{N}$; dann müßte gelten:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{(n+1)-2}}\pi r_1^2$$
$$= 4\pi r_1^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{1}{2^{n-1}}\pi r_1^2$$
$$= 4\pi r_1^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

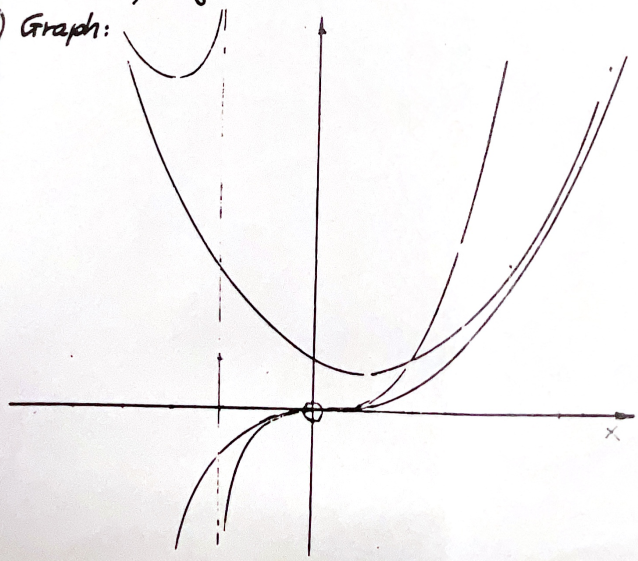
III. Schritt: Falls die Formel für $n=1$ gilt, gilt sie auch für $n=2$

" " " " $n=2$ ", " " " " $n=3$

usw. 8

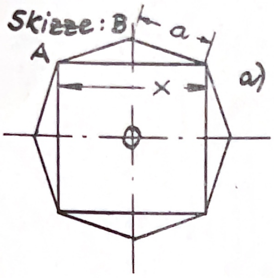
Σ 24

Lösung: (3)	Punkte:
a) Es ist $\mathbb{D}(x) = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$	1
b) Keine Symmetrie feststellbar	1
c) Nullstellen: $\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{x+2} = 0 \Rightarrow x = 0$	1
Pole: $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$	1
d) Ableitungen: $y' = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{(x+3)}{(x+2)^2}$	3
$y'' = \frac{1}{2}x \cdot \frac{(x^2+6x+12)}{(x+2)^3}$	3
Extrempunkte: $y' = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = -3$	1
$y''(-3) > 0 \Rightarrow TP(-3\mid\frac{27}{4})$	2
keine Hochpunkte!	
e) Falls $y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow WP(0\mid 0)$	1
f) Bist $y'(0) = 0$ und $WP(0\mid 0)$	
Gleichung der Wendetangenten: $y = 0$	2
g) NK_∞: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$	2
h) NK_0: $y = \frac{1}{8}x^3$	2
i) Graph:	4
	Σ 24



Lösung: (4) Punkte:

Skizze: 2



a) Es ist $A(x) = x^2 + x\sqrt{4a^2 - x^2}$ 2

mit $\mathbb{D}(x) = \{x \mid 0 < x < 2a\}$ 1

Dazu $A'(x) = 2x + \dfrac{4a^2 - 2x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$ 2

und $A''(x) = 2 + \dfrac{-12a^2x + 2x^3}{(4a^2 - x^2)\sqrt{4a^2 - x^2}}$ 2

$A'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = a\sqrt{2+\sqrt{2}}\,;\ x_2 = a\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 4

$A''(x_1) = \dfrac{8 - 8\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow$ Maximum 2

$A''(x_2) = \dfrac{4}{3 + 2\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow$ Minimum 2

$A_1 = 2a^2(1+\sqrt{2})\,;\quad A_2 = 2a^2$ 3

b) Für den Nachweis der Regelmäßigkeit genügt nachzuweisen, daß $\overline{OA} = \overline{OB}$ ist:

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OB} \\ \frac{x\sqrt{2}}{2} &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2} \\ a\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} &= a\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{4a - a^2(2+\sqrt{2})} \\ a^2(4 + 2\sqrt{2}) &= a^2(4 + 2\sqrt{2})\,; \text{ stimmt!} \end{aligned}$$ 4

Σ 24

Lösung: (5) Punkte:

a) Symmetrie zum Nullpunkt, weil $f(x) = -f(-x)$ 2

b) Es ist $x - \sin 2x = x$ oder $\sin 2x = 0 \Rightarrow x = n \cdot \frac{\pi}{2}$

Somit $S_{1|2}(\pm\pi|\pm\pi)$; $S_{3|4}(\pm\frac{\pi}{2}|\pm\frac{\pi}{2})$; $S_5(0|0)$ 4

c) Es ist $y' = 1 - 2\cos 2x$ und $y'' = 4\sin 2x$

$y' = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow H_1(-\frac{\pi}{6}|0{,}34)$; $H_2(\frac{5\pi}{6}|3{,}47)$ 3

$T_1(-\frac{5\pi}{6}|-3{,}47)$; $T_2(\frac{\pi}{6}|-0{,}34)$ 3

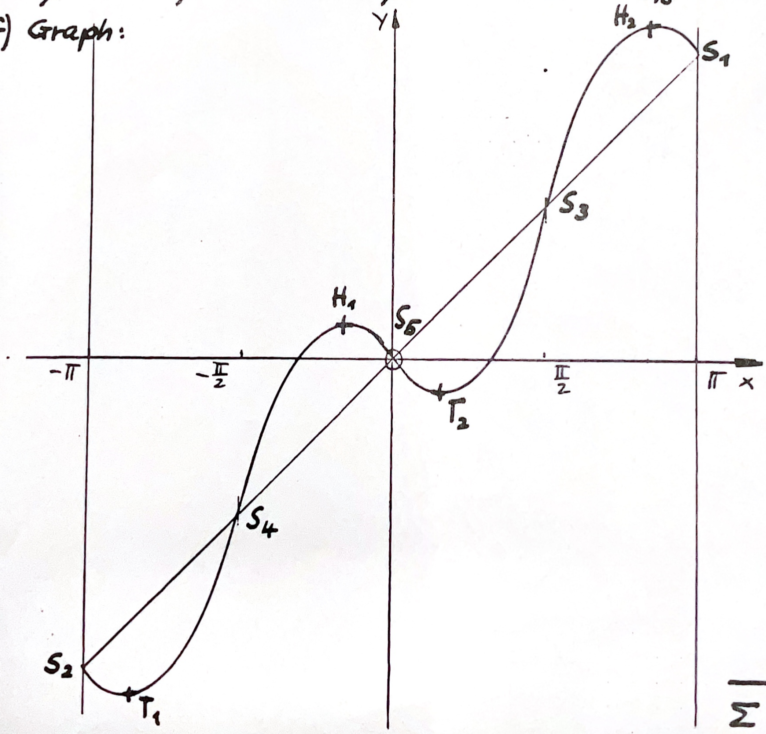
d) $y'' = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = n \cdot \frac{\pi}{2}$

Die Wendepunkte fallen mit S_1 bis S_5 zusammen! 4

e) $y = 0 \Rightarrow x = \sin 2x \Rightarrow x_1 = 0$

x_2 und x_3 lassen sich zeichnerisch mit Hilfe des Systems $y = \sin 2x \wedge y = x$ ermitteln: $x_{2|3} \approx \pm 1$ 3

f) Graph:



5

Σ 24