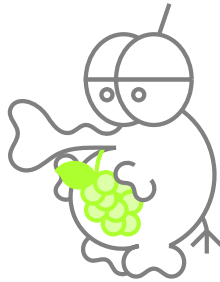


1412026104631642



Trauben liebsch

Exposition

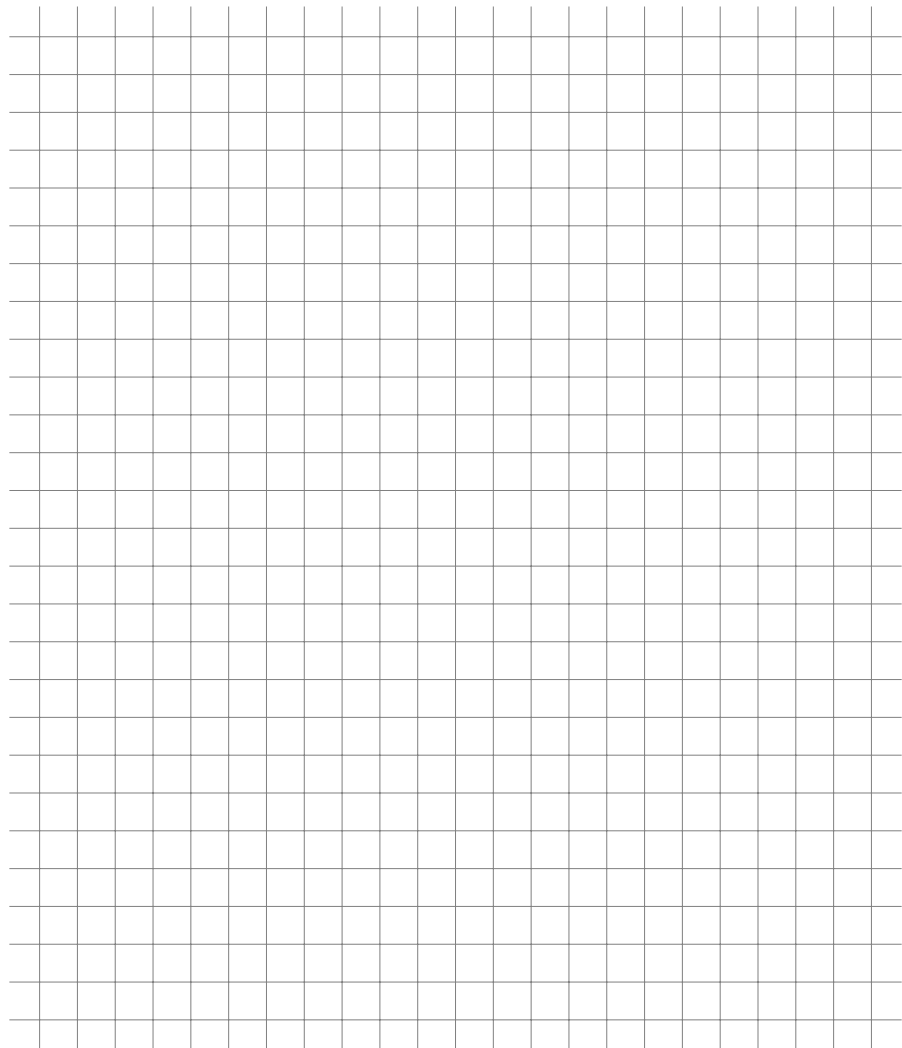
13.18.Gleichungssystemung

Die Schülerinnen und Schüler erweitern ihr Wissen aus der Sekundarstufe I zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und lernen das Gauß-Eliminationsverfahren als leistungsfähige Lösungsmethode kennen.

Komplikation

Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise.

In einem Traubenkistie mit 126 Trauben gibt es weiße, rote und blaue Trauben. Die dreifache Anzahl der weißen Trauben Minus die doppelte Anzahl der roten und Minus die halbe Anzahl der blauen Trauben ergibt 21. Die Hälfte der Anzahl der roten und die Hälfte der Anzahl der blauen Trauben ergibt 42. Untersuche, wie viele Trauben es von jeder Farbe gibt.



- 1 Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Lösungen linearer Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten, in einfachen Fällen auch mit einem Parameter. Sie nutzen neben den bekannten Verfahren den Gauß-Algorithmus und interpretieren die Lösungsvielfalt.

- **Matrixschreibweise** :

Dient zur effizienten Notation eines linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 & = & d \\ e \cdot x_1 + f \cdot x_2 + g \cdot x_3 & = & h \\ i \cdot x_1 + j \cdot x_2 + k \cdot x_3 & = & l \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{array} \right)$$

- **Gaußalgorithmus** :

Löst ein lineares reellwertiges Gleichungssystem. Durch geeignetes Multiplizieren in einer Zeile und addieren von Gleichungen werden zuerst die Koeffizienten e , dann i und dann j eliminiert:

$$\begin{array}{rcl} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 & = & d \\ e \cdot x_1 + f \cdot x_2 + g \cdot x_3 & = & h \\ i \cdot x_1 + j \cdot x_2 + k \cdot x_3 & = & l \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 & = & d \\ m \cdot x_2 + n \cdot x_3 & = & o \\ p \cdot x_3 & = & q \end{array}$$

Rückwärtiges Einsetzen liefert die Lösungen x_1 ; x_2 und x_3 .

- **Lösungsvielfalt** : Ein Gleichungssystem kann eindeutig sein (genau ein Wert pro Variable) mehrdeutig (unendlich viele Lösungen) oder uneindeutig (keine Lösung).



1 Lineare Gleichungssysteme

1.0 Gib jeweils an, ob die Lösung eindeutig, mehrdeutig oder uneindeutig ist.

1.0.1

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

$$2 \cdot x_3 = 6$$

1.0.2

$$x_1 + x_2 + x_3 = 42$$

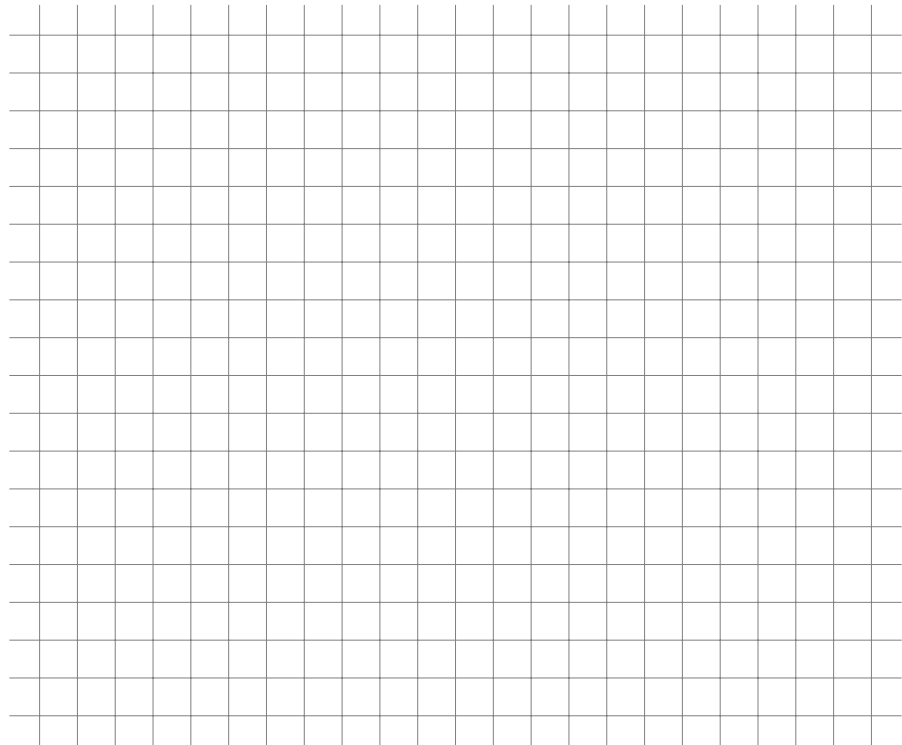
$$2 \cdot x_3 = 4$$

$$2 \cdot x_3 = 2$$

1.0.3

$$7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 42$$

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 100$$



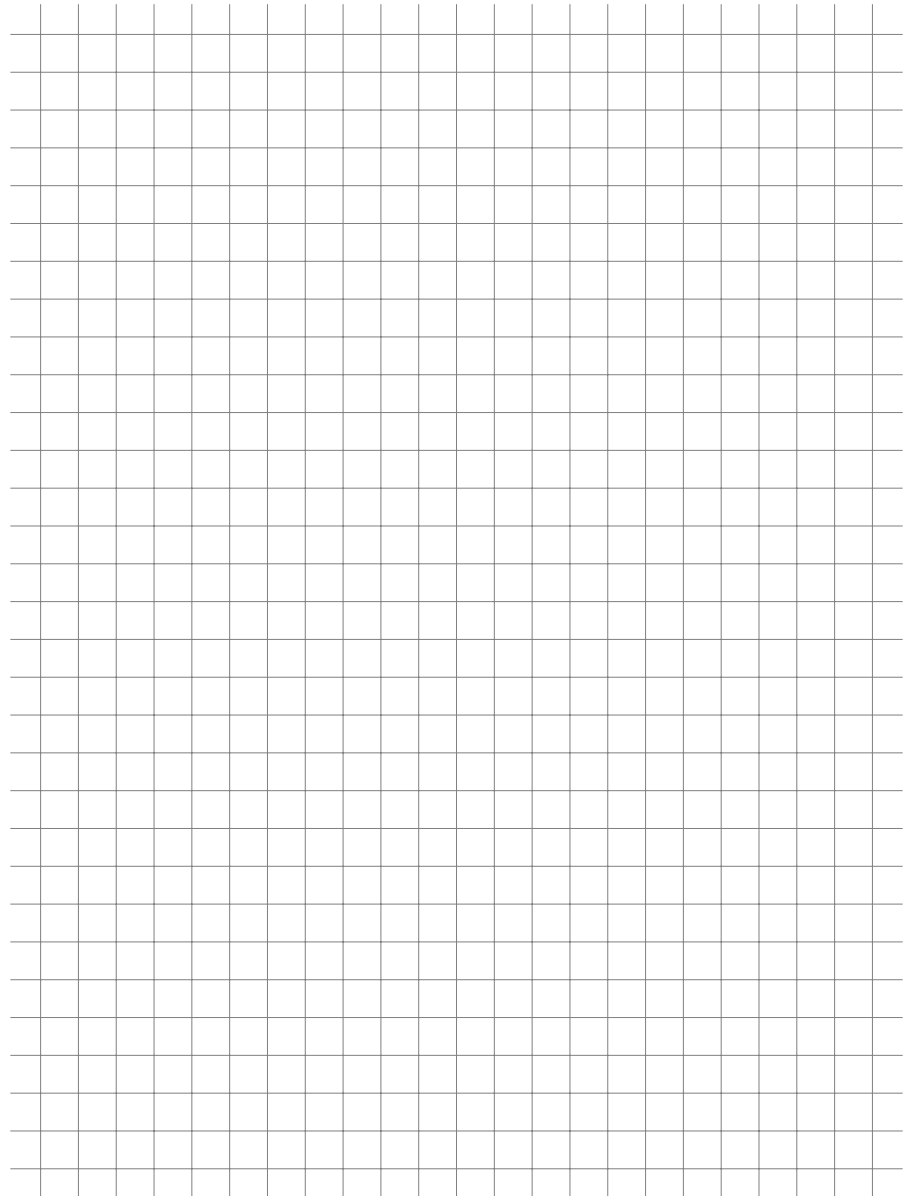
1.1 Berechne jeweils die Lösung des Gleichungssystems.

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 6$$

$$3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 5$$

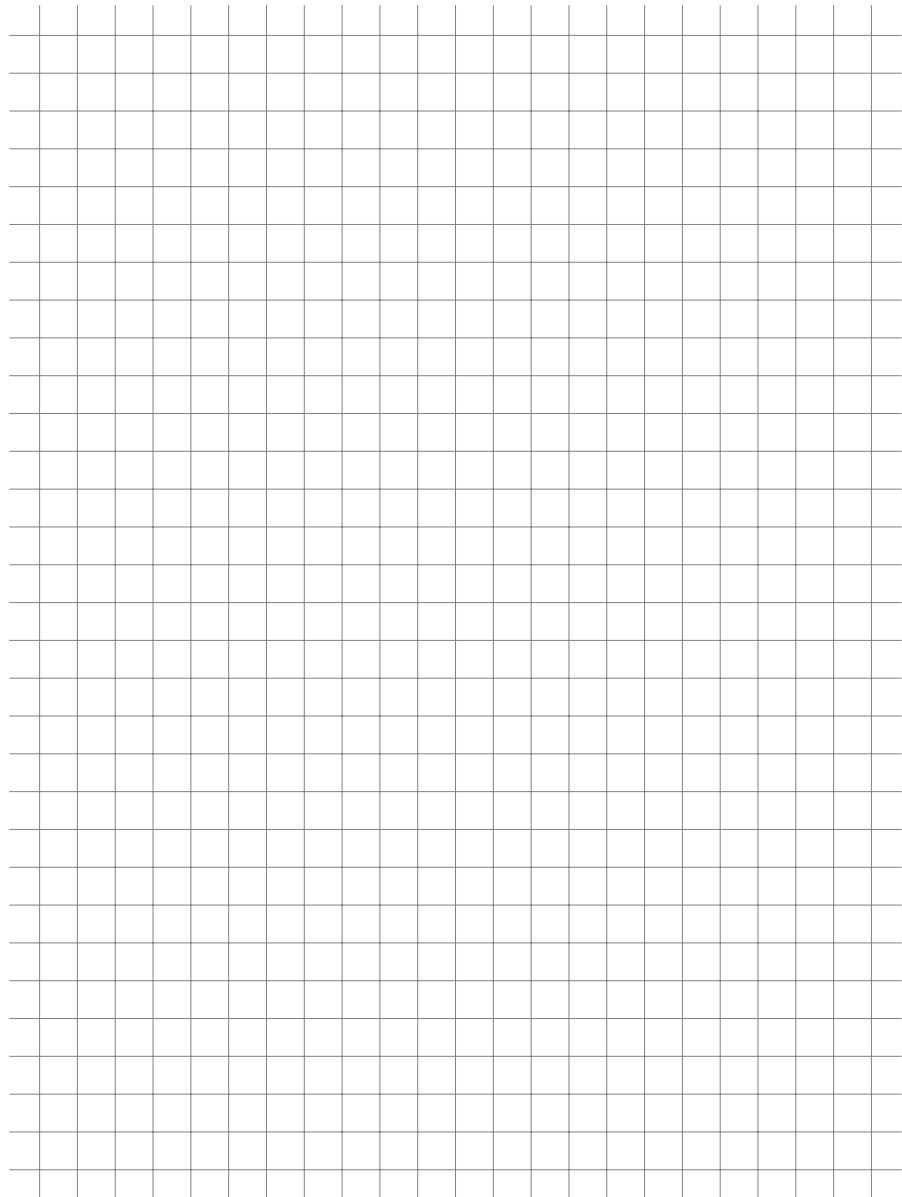
$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$



1.2 Berechne jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems und interpretiere die Lösung geometrisch.

$$\begin{array}{rclcl} 4 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & 8 \cdot x_3 & = & 6 \\ 1 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & & & = & 2 \\ -2 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & - & 4 \cdot x_3 & = & -3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

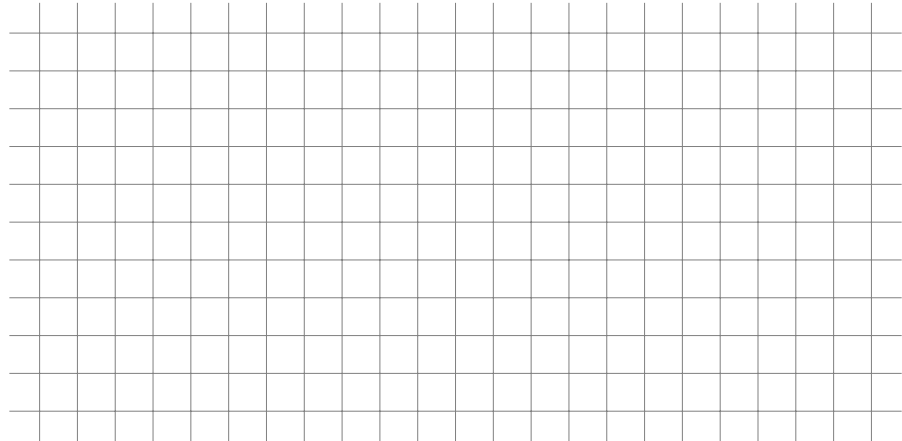


1.3 Gib für $p \in \mathbb{R}$ die Lösungsvielfalt des linearen Gleichungssystems an.

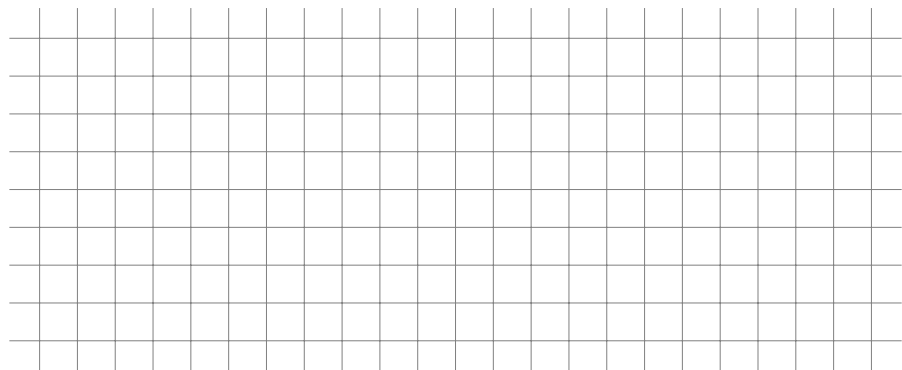
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 5$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + p \cdot x_3 = 4$$



1.4 Erläutere die Ineffizienz des Gaußalgorithmus an einem geeigneten Beispiels.



1 Berechne die Lösung des Gleichungssystems.

$$\frac{1}{14} \cdot x_1 + \frac{1}{7} \cdot x_2 + \frac{1}{21} \cdot x_3 = 11$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 126$$

$$\frac{1}{7} \cdot x_1 + \frac{1}{6} \cdot x_2 + x_3 = 55$$

