23122025182631642

Cookies liebsch

Exposition

## 11.3.Polynomfunktionierung

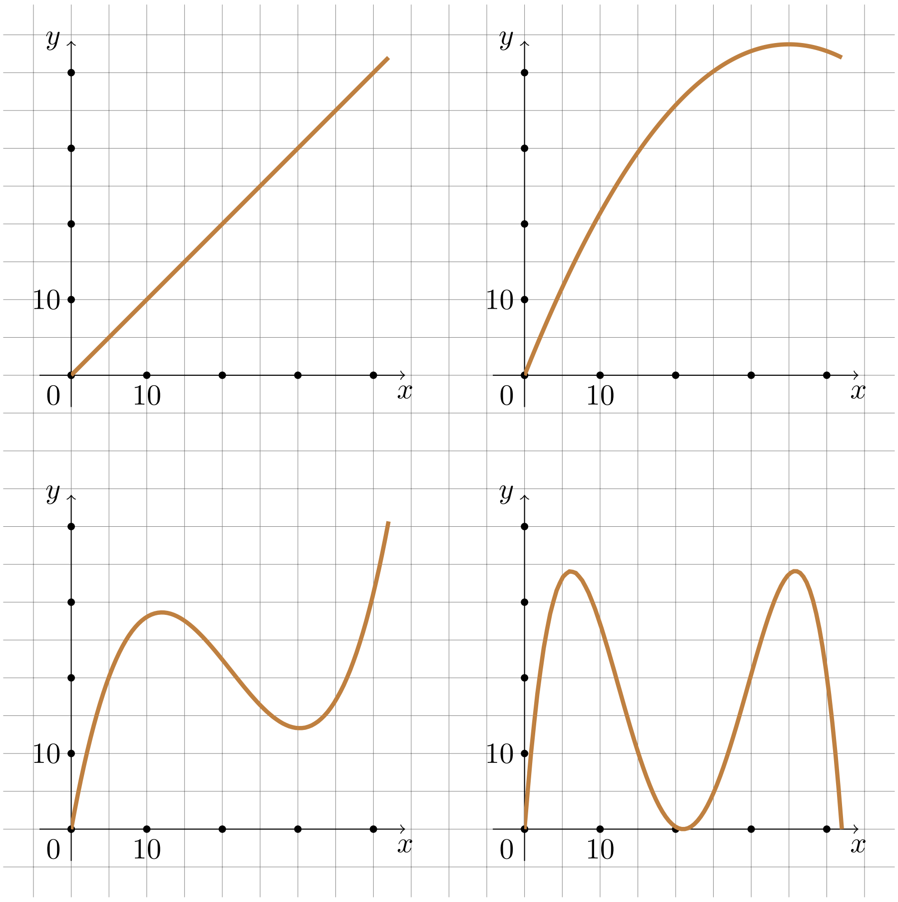
Die Schülerinnen und Schüler lernen Polynomfunktionen und deren Graphen kennen. Sie entdecken die charakteristischen Eigenschaften der Graphen dieser Funktionen und erweitern ihre mathematische Ausdrucksfähigkeit, indem sie Zusammenhänge zwischen Funktionstermen und Funktionsgraphen erläutern. In einfachen Fällen lösen die Schülerinnen und Schüler Polynomgleichungen und quadratische Ungleichungen und verknüpfen dabei formales Rechnen mit der Veranschaulichung durch entsprechende Funktionsgraphen. Die Schülerinnen und Schüler nutzen Funktionen zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge, z.B. aus Wirtschaft und Technik sowie aus Physik, Chemie und Biologie.

Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise.

Ein Vater backt mit seinen vier Kindern ($k_1$; $k_2$; $k_3$; $k_4$) Cookies. Nachdem der Teig fertig ist bekommt jedes Kind ein Blech, auf das es innerhalb von $42$ Minuten ($x$) $42$ Teigkugeln ($y$) legen soll. Dieses Tätigkeit kann modelliert werden durch:

$$k_1(x) = d \cdot x + e$$
$$k_2(x) = c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$
$$k_3(x) = b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$
$$k_4(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

Untersuche anhand der Schaubilder, welches Kind am meisten Teig nascht.



1 Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Polynomfunktionen mithilfe unterschiedlicher Darstellungsformen und begründen die Wahl der Form im mathematischen bzw. im anwendungsorientierten Kontext.

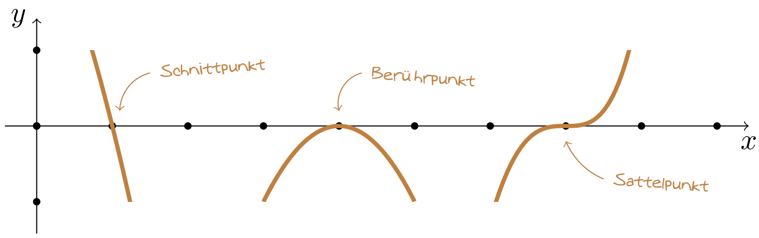
Allgemeine Form mit $n$-tem Grad für $n \in \mathrm{N}$ und $a; b; c; \ldots \in \mathrm{R}$:

$$f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \ldots + c \cdot x + d$$

Produktform mit Nullstellen $x_i$ und $i \in \mathrm{N}$:

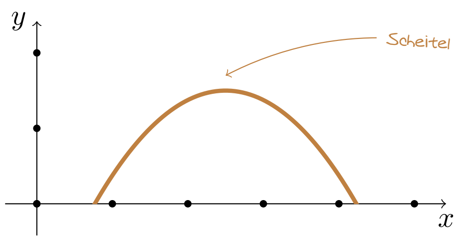
$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_2)^2 \cdot \ldots \cdot (x - x_3)^3 \cdot \ldots$$

Statt Zwei oder Drei können wir im Exponent auch höhere gerade beziehungsweise ungerade Zahlen einsetzen!




Scheitelform einer Polynomfunktion zweiten Grades (Parabel) mit Scheitel $S$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s; \qquad S(x_s|y_s)$$



2 Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Eigenschaften von Polynomfunktionen ausgehend von den Funktionstermen und skizzieren die Funktionsgraphen. Sie geben die Eigenschaften auch mit mathematischer Symbolsprache an. Darüber hinaus zeichnen die Schülerinnen und Schüler einen Funktionsgraphen mithilfe einer Wertetabelle.

3 Die Schülerinnen und Schüler bestimmen aus grafisch, tabellarisch oder verbal gegebenen Funktionseigenschaften einen geeigneten Ansatz und Bedingungen, die zur Ermittlung des Funktionsterms dienen. Ebenso ermitteln sie in geeigneten Fällen den Funktionsterm.

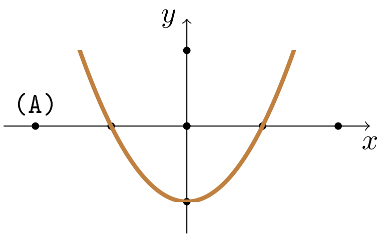
- Globales Verhalten für $f(x) = a \cdot x^n + \ldots$:

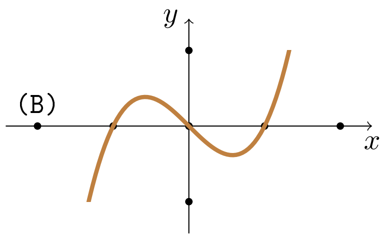
| | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| $n$ gerade | $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ | $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ |
| $n$ ungerade | $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ |
| | $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ |

- Symmetrie:

  Eine Polynomfunktion, die in der allgmeinen Form ausschließlich gerade Exponenten hat, ist symmetrisch zur $y$-Achse. (A)

  Eine Polynomfunktion, die in der allgmeinen Form ausschließlich ungerade Exponenten hat, ist symmetrisch zum Ursprung. (B)




- Fundamentalsatz der Algebra:

  Eine Polynomfunktion $n$-ten Grade hat maximal $n$ Nullstellen.

4 Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Lösung von Polynomgleichungen algebraisch und begründen die Auswahl der jeweiligen Lösungsstrategie. Sie deuten die berechneten Lösungen grafisch als Nullstellen einer Funktion beziehungsweise als Schnittstellen zweier Funktionen und bestimmen die Lösung quadratischer Ungleichungen mithilfe des Funktionsgraphen.

5 Die Schülerinnen und Schüler deuten Polynomfunktionen und ihre Eigenschaften in einem gegebenen Sachzusammenhang, zum Beispiel aus der Wirtschaft, Technik oder Naturwissenschaft. Sie ermitteln Polynomfunktionen zur Darstellung einfacher Optimierungsprobleme und interpretieren Wertetabellen, Funktionsgraphen und Funktionsterme zur Lösung dieser Probleme.

- Äquivalenzumformungen:

  Eine Gleichung wird gelöst, indem sie durch Äquivalenzumformungen so umgestellt wird, dass die Unbekannte auf einer Seite isoliert ist, wobei alle Umformungen auf beiden Seiten symmetrisch erfolgen, sodass die Lösungsmenge unverändert bleibt.

- Satz vom Nullprodukt:

  Eine Gleichung der Form:

  $$\texttt{Term1} \cdot \texttt{Term2} \cdot \ldots = 0$$

  Wird gelöst, indem man die einzelnen Faktoren Null setzt:

  $$\texttt{Term1} = 0; \qquad \texttt{Term2} = 0; \qquad \ldots$$

- Mitternachtsformel:

  Lösung der Gleichung mit $a; b; c \in \mathrm{R}$ und $a \neq 0$ der Form:

  $$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

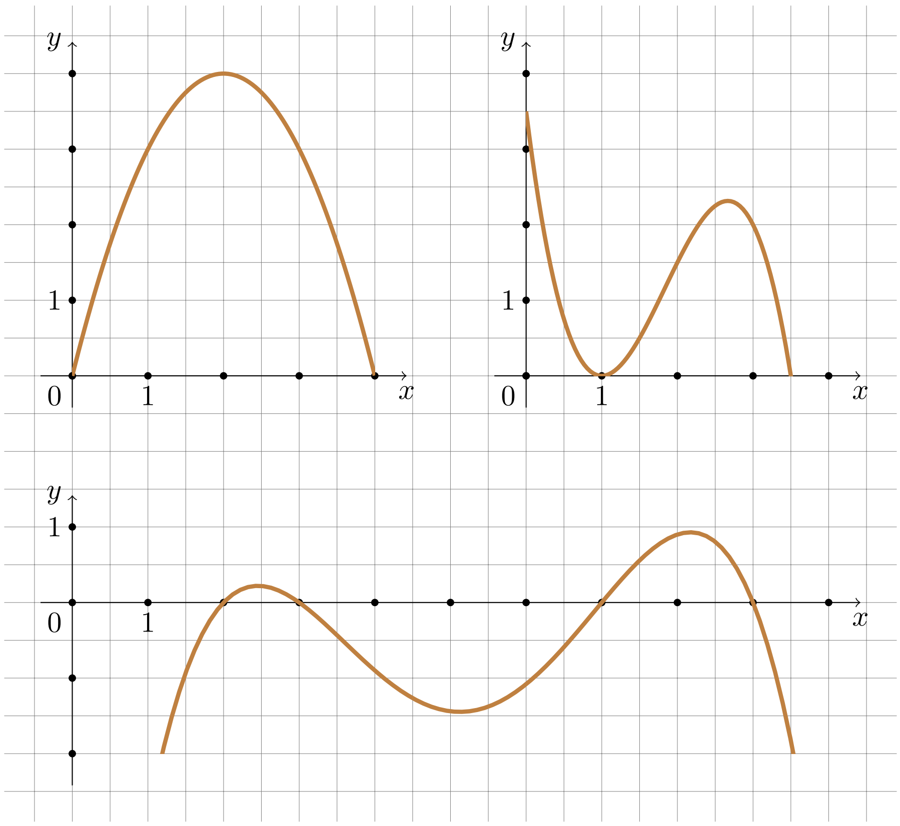
  ist die Mitternachtsformel:

  $$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

# 1 Darstellungsformen

1.0 Gib zum Funktionsgraphen jeweils die zugehörigen Funktionsgleichungen an.

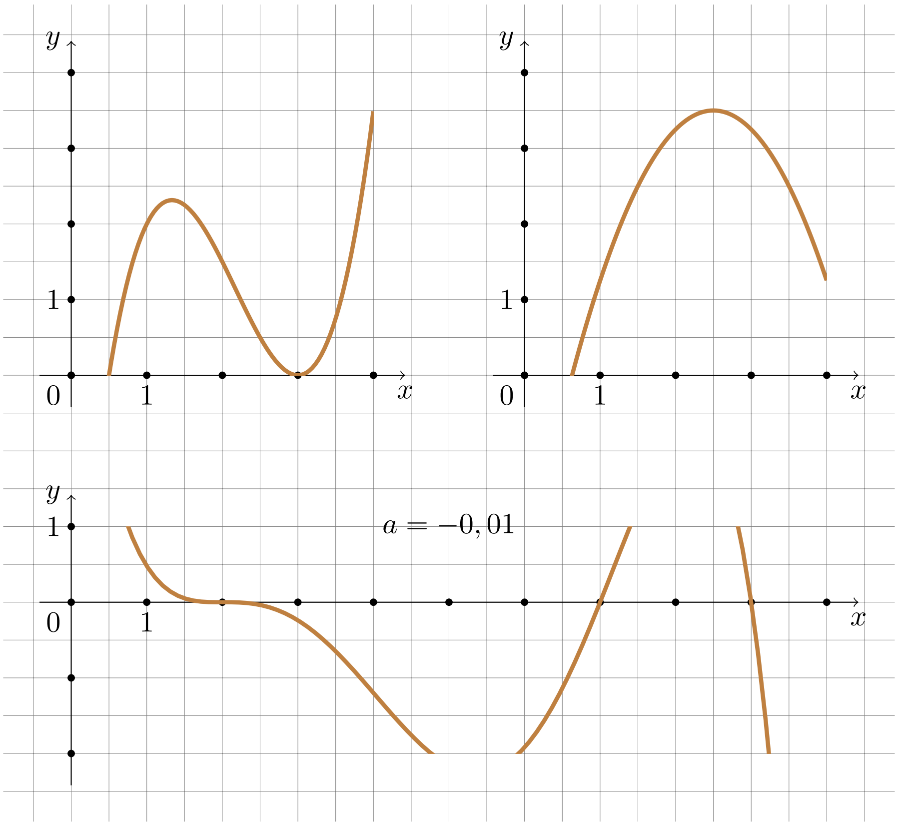
$$
\begin{aligned}
a(x) &= -1 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-3.5) \\
b(x) &= -(x-2)^2 + 4 \\
c(x) &= -x^3 + 5,5 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 3,5 \\
d(x) &= -0,03 \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-7) \cdot (x-9) \\
e(x) &= -x \cdot (x-4) \\
f(x) &= -0,03 \cdot x^4 + 0,63 \cdot x^3 - 4,47 \cdot x^2 + 12,33 \cdot x - 11,34 \\
g(x) &= -x^2 + 4 \cdot x
\end{aligned}
$$



1.1 Gib jeweils den Grad der Polynomfunktion an.

$$\begin{aligned}
a(x) &= 2 \cdot x^3 - 4 & e(x) &= 8 \cdot x^5 - 6 \cdot x^6 & i(x) &= 2 \cdot (x-4)^2 \cdot (x+1) \\
b(x) &= 5 \cdot x^5 - 2 \cdot x^4 & f(x) &= x^3 + 4 \cdot x^{14} & j(x) &= (x+3)^2 \cdot (2-x)^5 \cdot x \\
c(x) &= 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x & g(x) &= 3 \cdot x^5 - 5 \cdot x^5 & k(x) &= 2 \cdot x \cdot (x-3)^3 \\
d(x) &= 7 \cdot 7 - 42 & h(x) &= 3 + 2 \cdot x^3 & l(x) &= (x-4)^4 \cdot (x-4)^{-4}
\end{aligned}$$

1.2 Gib zu den Graphen jeweils den Funktionsterm einer möglichen Polynomfunktion an.



1.3 Gib die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion $f$ an, deren Grad größer als $2$ ist, die bei $x = 3$ einen Berührpunkt mit der $x$-Achse hat und für die gilt $f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathrm{R}$.

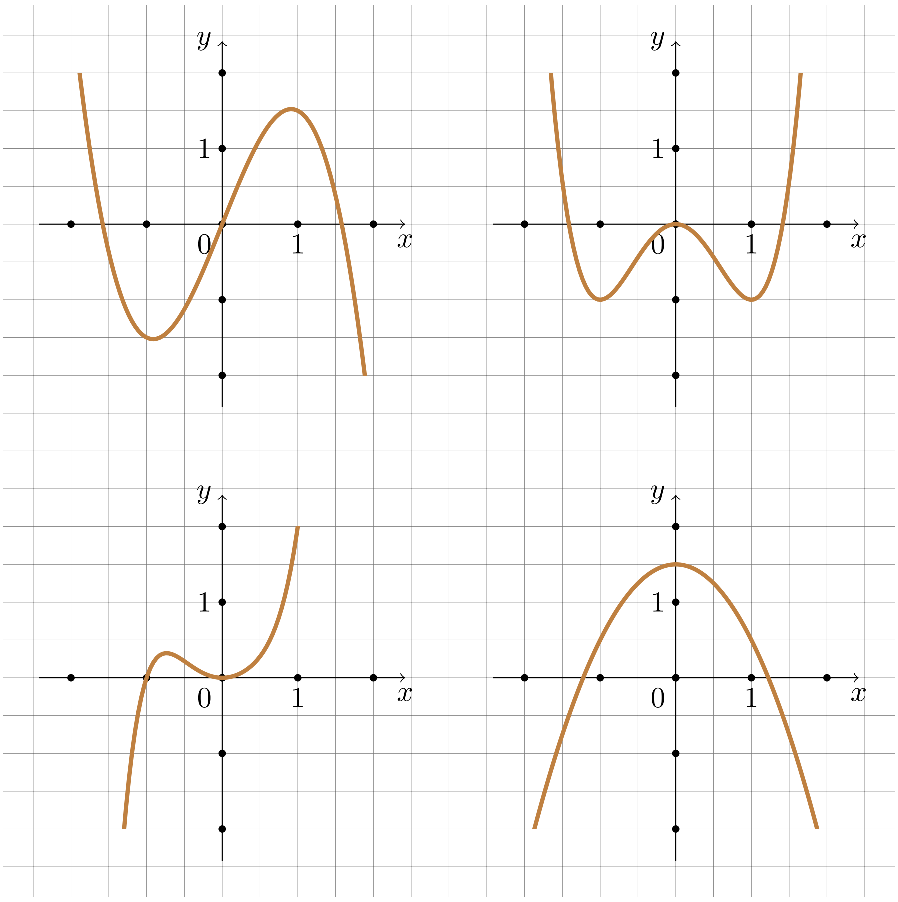
1.4 Ermittle zwei Polynomfunktionen, deren Funktionsgraphen mit ihrer eingeschlossenen Fläche den Längsschnitt eines Schnauzers modellieren. Skizziere den Längsschnitt in einem geeigneten Koordinatensystem und ermitle näherungsweise den Flächeninhalt des Querschnittes.

Taschenrechner erlaubt!

2 Eigenschaften

3 Ermittlung

3.0 Gib jeweils an, zu welchem Graphen die Funktionsgleichung gehört. Gib das globale Verhalten und gegebenenfalls die Symmetrieeigenschaft an.




$a(x) = x^4 - 2 \cdot x^2$; $\quad b(x) = -x^2 + 1,5$; $\quad c(x) = -x^3 + 2,5 \cdot x$; $\quad d(x) = x^5 + x^2$

3.1 Gib die Funktionsgleichung einer zur Wertetabelle zugehörigen Polynomfunktion vierten Grades an. Beschreibe das globale Verhalten sowie die Symmetrie der Funktion.

| $x$ | $0$ | $\pm 4$ | $\pm 6$ |
|---|---|---|---|
| $k(x)$ | $-2,5$ | $0$ | $-4$ |

3.2 Ermittle jeweils einen möglichen Funktionsterm einer Polynomfunktion.

3.2.1 Grad zwei, Schaubild hat den Scheitel bei $S(4|-1)$, hat keine Nullstellen.

3.2.2 Grad vier, Schaubild ist symmetrisch zur $y$-Achse, geht durch $P(1|1)$ und $Q(3|5)$.

3.2.3 Grad drei, Schaubild geht durch den Ursprung, hat einen Sattelpunkt bei $S(1|2)$

3.3 Gegeben ist eine Funktion $f$ ihr Schaubild sei $K$. Ermittle die Anzahl und Art der Nullstellen von $K$ in Abhängigkeit von $t \in \mathrm{R}$, wenn gilt:

$$f(x) = 3 \cdot (x - t) \cdot (x + 1)^3$$

3.4 Erläutere anhand einer Skizze, welchen allgemeinen Zusammenhang es zwischen den angegeben Eigenschaften und den Symmetrien des zugehörigen Graphen gibt, wenn gilt:

$$f(x) = f(-x); \qquad f(-x) = -f(x)$$

## 4 Polynomgleichungen

## 5 Sachzusammenhang

5.0 Berechne jeweils die Lösungen der Gleichung mit dem angegebenen Lösungsverfahren.

5.0.1 Äquivalenzumformungen:

$$2x^2 - 8 = 0$$

5.0.2 Satz vom Nullprodukt:

$$2 \cdot x^2 + 10 \cdot x = 0$$

5.0.3 Mitternachtsformel:

$$2 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 8 = 0$$

5.1 Berechne jeweils die Lösungen der Gleichung.

5.1.1

$$6 \cdot x - 10 = 2$$

5.1.2

$$4 \cdot x^2 + 3 = 30$$

5.1.3

$$2 \cdot x^3 = 54$$

5.1.4

$$5 \cdot x^2 - 7 \cdot x = 0$$

5.1.5

$$3 \cdot x = 4 \cdot x^3$$

5.1.6

$$(x + 10) \cdot (2 \cdot x - 2) = 0$$

5.2 Berechne jeweils die Lösungen der Gleichung.

5.2.1

$$3 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 2 = 0$$

5.2.2

$$2 \cdot x^2 - 9 \cdot x = -7$$

5.2.3

$$5 \cdot x^2 + 3 = 8 \cdot x$$

5.2.4

$$4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5 = 0$$

5.2.5

$$6 \cdot x^2 - 11 \cdot x = -3$$

5.2.6

$$7 \cdot x^2 + 5 = 13 \cdot x$$

5.3 Ein VirtualReality-Tischtennisspiel wird programmiert.

5.3.1 Gegeben ist die Flugbahn $f$ eines Tischtennisballes und die Schlägerbwegung $s$ eines Tischtennisschlägers. Zeige, dass der Schläger den Ball verfehlt, wenn gilt:

$$f(x) = -x^2 + 1,5$$

$$s(x) = (x+2)^2$$

5.3.2 Gegeben ist die Flugbahn $f$ eines Tischtennisballes. Das Tischtennisnetz wird modelliert mit dem Intevall auf $y$-Achse mit $0 \leq y \leq 1,7$. Berechne, ob der Tischtennisball das Netz trifft, wenn gilt:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-1,5)^2 \cdot (x+1,5)^2$$

5.3.3 Gegeben ist die Flugbahn $f$ eines Tischtennisballes und die Schlägerbwegung $s$ eines Tischtennisschlägers. Untersuche ob der Schläger den Ball verfehlt, wenn gilt:

$$f(x) = -x^2 + 1$$

$$s(x) = (x-1)^2 + 0,5$$

5.4 Berechne die Lösungen der Gleichung.

$$x^5 - 6 \cdot x^3 = -5 \cdot x$$

1 Gib die Lösung der Gleichung an.

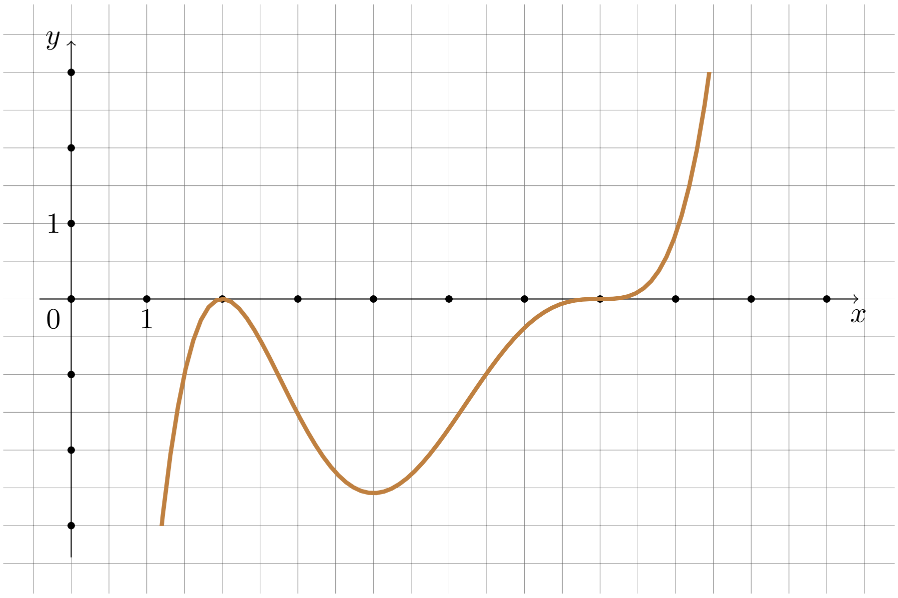
Taschenrechner erlaubt!

$$0,5 \cdot x^2 - 42 \cdot x + 882 = 0$$

2 Ermittle $b = a^{-1}$ an, wenn $f$ die zum Graphen zugehörige Polynomfunktion ist mit:

Taschenrechner erlaubt!

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)^m \cdot (x - x_2)^n \cdot \ldots$$



3 Eine rechteckige Tischtennisplatte mit beliebigen Seitenlängen soll auf einer dreieckigen Stellfläche positioniert werden. Die Stellfläche kann modelliert werden durch die Fläche, die von der Geraden $g$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird. Berechne die Fläche der größtmöglichen Tischtennisplatte, die man auf der Stellfläche unterbringen kann, wenn gilt:

$$g : y = -\frac{14}{3} \cdot x + 28$$